



Банк России



Неопределенность технического прогресса, байесовское обучение и «зеленый» парадокс

Серия докладов об экономических исследованиях

№. 133 / август 2024

А.А. Реентович

Александр Реентович

Банк России, Департамент исследований и прогнозирования

E-mail: ReentovichAA@cbr.ru

Доклады Банка России проходят процедуру анонимного рецензирования со стороны членов Консультативного исследовательского совета Банка России и внешних рецензентов.

Автор благодарен Андрею Синякову за привлечение внимания автора к теме исследования. Автор также благодарит Ксению Юдаеву, Константина Стырина, Марка Сидоровского, анонимного рецензента и участников двух исследовательских семинаров Банка России за ценные комментарии и предложения. Автор благодарит Александра Цемахмана за подготовку русского текста.

Содержание настоящего доклада по экономическим исследованиям отражает личную позицию авторов. Результаты исследования являются предварительными и публикуются с целью стимулировать обсуждение и получить комментарии для возможной дальнейшей доработки материала. Содержание и результаты доклада не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России или указание на официальную политику или решения регулятора. Любые ошибки в этом материале являются исключительно авторскими.

Все права защищены. Воспроизведение представленных материалов допускается только с разрешения авторов.

Фото на обложке: Shutterstock/FOTODOM

© Центральный банк Российской Федерации, 2024

Адрес: 107016, Москва, ул. Неглинная, 12, к. В

Телефоны: +7 499 300-30-00, +7 495 621-64-65 (факс)

Официальный сайт Банка России: www.cbr.ru

Неопределенность технического прогресса, байесовское обучение и «зеленый» парадокс

Александр Реентович 

Банк России. ReentovichAA@cbr.ru

Аннотация

В последние полтора десятилетия в литературе, посвященной влиянию изменений климата на экономику, широко обсуждается так называемый «зеленый» парадокс. Этот термин относится к ситуации, когда климатическая политика, несмотря на благие намерения, приводит к негативным последствиям, таким как рост выбросов парниковых газов. Возникновение парадокса обычно связывают с истощаемостью ископаемых видов топлива: добывающие фирмы стремятся уравнивать приведенную стоимость ресурсной ренты в каждый период, поэтому, ожидая повышения налогов в будущем, они увеличивают текущую добычу. При этом, когда источником роста производительности в «зеленых» секторах является обучение в процессе деятельности, «зеленый» парадокс не возникает. В работе показано, что такая ситуация может возникнуть при проведении оптимальной политики и вне связи с истощением ресурсов, если технический прогресс в чистом секторе экономики характеризуется неопределенностью. Иначе говоря, если будущие темпы роста производительности неизвестны, экономические агенты вынуждены формировать ожидания относительно развития технологий, опираясь на теорему Байеса, и принимать соответствующие решения. Если рынок изначально полагает, что из-за технического прогресса спрос на «грязный» капитал будет сокращаться быстрее, чем предполагают органы регулирования, последним придется снижать углеродный налог или даже субсидировать инвестиции в «грязный» капитал, чтобы избежать нехватки инвестиций в этот вид капитала и, как следствие, энергии уже сегодня. При этом, если приток субсидий будет достаточно продолжительным, выбросы CO_2 могут возрасти.

Ключевые слова: изменение климата, байесовское обучение, «зеленый» парадокс, обучение в процессе деятельности, гетерогенные убеждения.

JEL-классификация: D81, D83, D84, Q54, Q55, Q58.

1 Введение

Глобальное потепление представляет собой, с одной стороны, серьезную угрозу для человечества. С другой стороны, это классический пример негативной экстерналии – проблемы, которую предполагается решить путем введения соответствующего налога Пигу. Однако относительно эффективности такой меры возникли серьезные сомнения. Как утверждается в работах (Sinn [2008](#); Sinn [2012](#)), политика, проводимая с лучшими намерениями, может привести к результатам, которые противоположны запланированным. А именно: выбросы углекислого газа могут увеличиться – во всяком случае, временно, в ответ на политику, направленную на их сокращение. Такая ситуация известна как «зеленый» парадокс (ЗП).

Первоначально довод в пользу ЗП основывался на работе (Hotelling [1931](#)): если существует исчерпаемый ресурс, то условие оптимальности для задачи компании, добывающей этот ресурс, заключается в том, что приведенная стоимость ресурсной ренты должна быть одинаковой для любого периода времени. Поскольку спрос на такой ресурс в каждом периоде характеризуется нисходящим трендом, предстоящее увеличение налогов с продаж¹ побуждает компании перераспределять добычу, то есть не откладывать ее на будущее, когда повысят налоги, а расширять ее сейчас (будущая цена вырастет, а текущая будет снижаться, пока приведенные значения ресурсной ренты не сравняются). В конечном счете весь ресурс будет извлечен, если каждая его единица приносит положительную ренту. Таким образом, углеродный налог не предотвращает климатические изменения – он ускоряет их!

В 2010-х гг. эта простая модель была обобщена, и многие упрощающие предположения были сняты, однако обсуждение по-прежнему в основном касалось добычи ископаемых видов топлива (Jensen, Mohlin et al. [2015](#)). В отличие от этого, в данной работе показывается, что ЗП может возникнуть даже в экономике без исчерпаемых ресурсов при наличии в ней «грязных» производственных мощностей – например, электростанций на ископаемом

¹Предполагается, что повышение налогов может откладываться по политическим причинам. Однако тот же эффект возникает, если налоги вводятся немедленно, но при этом ожидается, что они будут расти быстрее, чем процентная ставка.

топливе².

Более того, «зеленый» парадокс стал синонимом непреднамеренных последствий климатической политики (Jensen, Mohlin et al. 2015, p. 246). В статье принят еще более общий подход: любая климатическая политика, проводимая бенеvolentным правительством, считается парадоксальной, если она умышленно или неумышленно увеличивает выбросы углерода хотя бы в краткосрочной перспективе по сравнению с некоторым базовым сценарием, таким как «бизнес как обычно» (BAU). В частности, показывается, что ex ante оптимальная политика может привести к появлению ЗП.

Некоторые авторы утверждают, что «зеленый» технический прогресс (ЗТП) в форме обучения в процессе деятельности в секторе возобновляемой энергетики противодействует эффектам ЗП или способствует их смягчению (Nachtigall and Rübbelke 2016; Hannesson 2018). Основной аргумент заключается в том, что если благодаря обучению в процессе деятельности производители «зеленой» энергии увеличивают текущий объем ее производства, то текущая цена на энергию падает, что делает добычу ископаемого топлива менее привлекательной в настоящий момент³. Кроме того, в ходе технического прогресса в «зеленом» секторе быстрее становятся доступными альтернативные технологические решения, делающие использование ископаемого топлива экономически нецелесообразным, в результате чего больше углерода остается неизвлеченным. Однако ни одна из существующих работ не рассматривает ЗТП как процесс, связанный с неопределенностью по самой своей природе. В отличие от них, в этой статье предлагается модель, в которой ЗТП является стохастическим процессом с параметрической неопределенностью, динамически устраняемой с помощью байесовского обучения. Показано, что в таких условиях ЗТП может приводить к «зеленому» парадоксу. А именно: если сектор невозобновляемых ресурсов ожидает, что «зеленый» технический прогресс будет быстрым, а

²В работе (Smulders et al. 2012) фактически уже была показана возможность возникновения ЗП при отсутствии ограниченности ресурсов. Однако в ней предлагался механизм, значительно отличающийся от представленного здесь, и не рассматривался вопрос об оптимальности политики, приводящей к парадоксу.

³Если «зеленые» компании не полностью эндогенизируют процесс обучения в процессе деятельности (например, когда его скорость зависит от общего объема «зеленого» капитала, а не от капитала, принадлежащего отдельной компании), «зеленые» субсидии становятся необходимыми для достижения результата, оптимального по Парето.

государство считает, что медленным, то правительству необходимо снизить углеродный налог или даже предоставить соответствующие субсидии, чтобы избежать недоинвестирования в «грязный» капитал и текущей нехватки энергии. Таким образом, оптимальная климатическая политика стимулирует увеличение выбросов.

Подобный подход к моделированию ЗТП развивают недавние работы, посвященные экономическому росту, такие как (Mirman et al. 2016) и (Fu and Le Riche 2021). В них отмечается неопределенность будущего развития технологий, а в различные виды моделей роста встраивается байесовское обучение⁴.

Идея байесовского обучения в условиях неопределенности не нова для экономики климатических изменений — см. например, обзор литературы в работе (Lemoine and Rudik 2017). Однако до сих пор наибольшее внимание уделялось неопределенности в отношении чувствительности климата к воздействующим на него факторам (Kelly and Kolstad 1999; Hwang et al. 2017; Rudik et al. 2018) и будущих мер в области политики (Dalby et al. 2018). Хотя ранее был опубликован ряд работ по климатической тематике, в которых принимается во внимание неопределенность роста или неопределенность развития технологий, например (Jensen and Traeger 2014) и (García-León 2016), все вышеупомянутые статьи посвящены в первую очередь моделированию индивидуальных агентов — регуляторов (социальных планировщиков) или инвесторов⁵. В нашей модели, напротив, рассматривается взаимодействие нескольких агентов с гетерогенными априорными убеждениями. Таким образом, данную работу можно соотнести с исследованиями по гетерогенным убеждениям в климато-экономических моделях (Bréchet et al. 2014; Kiseleva 2016; Nutz and Stebegg 2022), хотя в них не анализируется неопределенность развития «зеленых» технологий, а экономические агенты не моделируются как «статистики-байесианцы».

В целом, новизна настоящей работы состоит в следующем: во-первых, в ней рассматривается экономика, в которой производство с использованием

⁴Следует отметить, что Fu and Le Riche (2021) впервые рассмотрели децентрализованное равновесие при байесовском обучении, хотя и без допущения о том, что у агентов могут иметься разные априорные убеждения.

⁵В работе (Karp and J. Zhang 2001) регулятор взаимодействует с фирмами, но они не обучаются, а их оптимизационные задачи внутрипериодные.

«чистого» капитала базируется на технологии, подверженной параметрической неопределенности и стохастическим изменениям, а поведение агентов в этих условиях опирается на теорему Байеса. Во-вторых, учитывается взаимодействие нескольких агентов с гетерогенными априорными убеждениями; в-третьих, показывается, что даже при отсутствии несовершенной конкуренции, асимметрии информации или исчерпаемости ресурсов в результате проведения оптимальной политики может возникнуть «зеленый» парадокс. В ходе исследования выясняется, что даже слабый ЗП возможен только при экстремальных значениях параметров модели. Тем не менее, регулятор должен принимать во внимание неоднородность убеждений, потому что оптимальный налог на углерод не равен социальным издержкам углерода, если ожидания фирм и правительства не совпадают.

Статья имеет следующую структуру: в разделе 2 описывается базовая модель и формулируются основные теоретические выводы; в разделе 3 описаны вычислительные методы решения базовой модели и ее расширений, а также представлены результаты численных экспериментов; в разделе 4 содержится заключение и обсуждаются направления дальнейших исследований и аспекты, актуальные для регулирующих органов.

2 Базовая модель

Рассмотрим модель частичного равновесия со следующей структурой. Предположим, что экономика включает орган регулирования, предприятие, вырабатывающее энергию, и две компании, производящие два разных вида капитала – экологически чистый и экологически грязный (переменные, относящиеся к этим видам капитала, обозначаются верхними индексами c и d). Предполагается, что все компании взаимодействуют на совершенно конкурентных рынках. Экономика существует в течение бесконечного числа периодов, и каждый агент в фиксированные моменты времени решает задачу динамической оптимизации.

Компания i ($i \in \{c, d\}$) выбирает уровень инвестиций I_t^i для регулирования объема существующего капитала K_{t-1}^i . Каждая компания несет соответствующие издержки подстройки, которые описываются выпуклой

кривой в соответствии с $(I_t^i)^{\alpha_i}, \alpha_i \in \{2, 4, 6, \dots\}$. Динамика K_t^i задается уравнением:

$$K_t^i = (1 - \delta_i)K_{t-1}^i + I_t^i, \quad (2.1)$$

где $\delta_i \in (0, 1)$. Обе компании максимизируют дисконтированный поток ожидаемой прибыли⁶.

Мгновенная функция полезности бенеvolentного регулятора задается следующим образом⁷:

$$\begin{aligned} W_t &= U(Y_t) - F(I_t^d, I_t^c) - G(D_t) \\ &= \frac{Y_t^{1-\eta}}{1-\eta} - [(I_t^d)^{\alpha_d} + (I_t^c)^{\alpha_c}] - \kappa_d \frac{D_t^{1+\chi}}{1+\chi}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где:

$\eta, \chi > 0$,

Y_t – количество выработанной энергии,

$[(I_t^d)^{\alpha_d} + (I_t^c)^{\alpha_c}]$ общие издержки подстройки,

а D_t – объем загрязнения.

Обозначим рыночный коэффициент дисконтирования по времени как $\beta = (1+r)^{-1} \in (0, 1)$ где r – рыночная ставка процента. Спрос потребителей на энергию задается условием $p_t = U'(Y_t) = Y_t^{-\eta}$.

В течение каждого периода времени объем загрязнения D_t растет пропорционально размеру «грязного» капитала, при этом текущий объем CO_2 частично рассеивается в атмосфере:

$$D_t = (1 - \delta)D_{t-1} + \gamma K_t^d, \quad (2.3)$$

где $\delta \in (0, 1), \gamma > 0$.

Производитель энергии заимствует на один период капитал двух видов (стоимость заимствования обозначается как p_t^c, p_t^d). Государство может

⁶Разделение капитала на две категории становится распространенным допущением в литературе, посвященной влиянию изменений климата на экономику (Jin and Z. X. Zhang 2019; Baldwin et al. 2019).

⁷Фактически используется та же функция, что и в статье (Gronwald et al. 2017): социальная полезность энергии за вычетом общих затрат на ее производство и социальных издержек, связанных с сопутствующим загрязнением. Однако в настоящей работе рассматривается более общий случай, когда последние два члена могут быть нелинейными (строго выпуклыми).

облагать налогами (τ_t^c, τ_t^d) оба вида капитала. Производитель энергии комбинирует капитал двух видов, применяя при этом стохастическую технологию, характеризующуюся постепенным ростом эффективности использования «зеленого» капитала^{8,9}:

$$Y_t = A_y [\nu(A_t K_t^c)^\xi + (1 - \nu)(K_t^d)^\xi]^{1/\xi}, \quad (2.4)$$

где: $A_y > 0, \nu, \xi \in (0, 1)$ и

$$A_t = \begin{cases} A_{t-1} + \lambda^m A_0, & \text{с вероятностью } \theta, \\ A_{t-1}, & \text{с вероятностью } 1 - \theta, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $m \leq t$ – число раз, когда производительность возростала до момента времени t (включительно), $\theta \in (0, 1), \lambda \in (0, 1)$ ¹⁰. Заметим, что

$$A_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{A_0}{1 - \lambda} \quad \text{a.s.}, \quad (2.6)$$

где a.s. означает «сходимость почти наверное». Далее термин «новое стационарное состояние» относится к асимптотическому стационарному состоянию с $A_t \equiv A_0/(1 - \lambda)$.

⁸Производство энергии в нашей модели можно описать в терминах статьи (Baldwin et al. 2019): предположим, что энергия (или электричество) Y_t вырабатывается по технологии с постоянной эластичностью замещения (CES) $Y_t = A_y [\nu(H_t)^\xi + (1 - \nu)(\Gamma_t^{ED})^\xi]^{1/\xi}$, где $H_t \equiv A_t K_t^c$ и Γ_t^{ED} – соответственно «возобновляемые производственные мощности» («человеческий капитал в виде знаний, а также сама инфраструктура») и ««грязные» производственные мощности». Производство «грязной» энергии в свою очередь требует объединения «грязного» капитала с ископаемым топливом O_t в фиксированной пропорции: $\Gamma_t^{ED} = \min\{K_t^d, \zeta O_t\}, \zeta > 0$. Однако добыча не требует затрат, а ее объем не ограничен сверху, поэтому $\Gamma_t^{ED} \equiv K_t^d$.

⁹Следует учесть, что для удобства изложения используется несколько нестандартный тайминг. Предполагается, что новые инвестиции немедленно увеличивают запас капитала, благодаря чему капитал текущего периода используется в текущем производстве, а текущие выбросы растут пропорционально текущему объему «грязного» капитала (то есть «грязным» инвестициям). При стандартном тайминге запасов текущие инвестиции могут оказать влияние на выбросы только по истечении двух периодов:

$$\begin{aligned} D_{t+1} &= (1 - \delta)D_t + \gamma K_t^d, \\ K_{t+1}^d &= (1 - \delta_d)K_t^d + I_t^d, \\ \Rightarrow D_{t+1} &= (1 - \delta)[(1 - \delta)D_{t-1} + \gamma K_{t-1}^d] + \gamma[(1 - \delta_d)K_{t-1}^d + I_{t-1}^d]. \end{aligned}$$

Эта особенность не приводит к логической непоследовательности: с помощью капитала не производятся инвестиционные товары, как в большинстве моделей общего равновесия; эту предпосылку также можно легко изменить – ср. Control model из (Cyert and DeGroot 1974)).

¹⁰Как и в (Hannesson 2018), в данной работе ЗТП моделируется как экзогенный процесс, поскольку «зеленые» субсидии здесь не рассматриваются.

Наконец, «зеленый» технический прогресс характеризуется параметрической неопределенностью, в связи с чем агенты вынуждены обновлять свои априорные убеждения относительно закономерностей развития ЗТП, опираясь на теорему Байеса. Иначе говоря, значение θ неизвестно, но известно, что $\theta \in \{\theta_H, \theta_L\}$, $\theta_H > \theta_L$ ¹¹ и агент i имеет априорное убеждение в виде:

$$\theta = \begin{cases} \theta_H, & \text{с вероятностью } q_0^i, \\ \theta_L, & \text{с вероятностью } 1 - q_0^i, \end{cases} \quad (2.7)$$

Динамика убеждений агента i описывается формулой Байеса¹²:

$$q_t^i = \begin{cases} \frac{\theta_H q_{t-1}^i}{\theta_H q_{t-1}^i + \theta_L (1 - q_{t-1}^i)}, & A_t > A_{t-1}, \\ \frac{(1 - \theta_H) q_{t-1}^i}{(1 - \theta_H) q_{t-1}^i + (1 - \theta_L) (1 - q_{t-1}^i)}, & A_t = A_{t-1}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Ключевой особенностью данной модели является то, что агенты могут иметь различные априорные убеждения. Таким образом, в экономике существует три вида апостериорных вероятностей (и соответствующих им операторов ожидания): q_t^p, q_t^c, q_t^d ($\mathbb{E}_t^p, \mathbb{E}_t^c, \mathbb{E}_t^d$) для регулятора, производителей «чистых» и «грязных» средств производства соответственно¹³. Логично предположить, что априорные убеждения у разных агентов различны, учитывая, что «зеленые» технологии являются принципиально новыми и у агентов нет общего надежного источника сведений об их будущем развитии.

Предположим, что до $t = 0$ экономика находится в детерминированном исходном состоянии, в котором $A_t \equiv A_0$; в момент времени 0 становится известно, что ЗТП начнется с периода 1, поэтому в период 0 агенты принимают решения в соответствии со своими априорными убеждениями. Начиная с периода 1 они наблюдают за развитием технологии, обновляют

¹¹В дальнейшем такие выражения, как «экономика находится в j -м режиме» или «состояние мира — j », означают, что фактическое значение $\theta = \theta_j$.

¹²Предполагается, что технологический шок и актуализация убеждений экономических агентов происходят в начале периода, до заключения сделок, а величина A_t может непосредственно наблюдаться всеми агентами.

¹³Перед производителем энергии стоит по существу статическая задача, поэтому его ожидания не имеют значения.

убеждения и принимают соответствующие решения. Следующее Предложение описывает оптимальную политику, которую должен проводить benevolentный регулятор. Анализ централизованных и децентрализованных решений (а также доказательства всех предложений, приведенных ниже) представлен в Приложении А.

Предложение 1 *Оптимальная политика (ОП) в описываемой экономике задается условиями:*

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_t^d = & \underbrace{\kappa_d \gamma [D_t^x + \beta(1 - \delta) \mathbb{E}_t^p (D_{t+1}^x + \beta(1 - \delta) D_{t+2}^x + \dots)]}_{SCC} \\ & + \underbrace{\beta(1 - \delta_d) \alpha_d [\mathbb{E}_t^d ((I_{t+1}^d)^{\alpha_d - 1}) - \mathbb{E}_t^p ((I_{t+1}^d)^{\alpha_d - 1})]}_{SCED^d} \end{aligned} \quad (2.9)$$

и

$$\hat{\tau}_t^c = \underbrace{\beta(1 - \delta_c) \alpha_c [\mathbb{E}_t^c ((I_{t+1}^c)^{\alpha_c - 1}) - \mathbb{E}_t^p ((I_{t+1}^c)^{\alpha_c - 1})]}_{SCED^c}. \quad (2.10)$$

Иными словами, оптимальный углеродный налог – это сумма двух компонент: социальных издержек углерода (SCC) и социальных издержек расхода ожиданий (SCED). В отличие от многих существующих моделей, оптимальный углеродный налог $\hat{\tau}_t^d$ может оказаться отрицательным, если значение SCED отрицательно и по модулю превосходит SCC. Это происходит, если руководители компании, производящей «грязные» средства производства, ожидают, что спрос на их продукцию (и, следовательно, их собственный спрос на инвестиции) из-за технического прогресса будет сокращаться быстрее, чем планирует государство. В этом случае значение K^d становится неоптимально низким, а государство вынуждено субсидировать «грязные» инвестиции. Напротив, если сектор «грязного» капитала менее оптимистичен в отношении темпа ЗТП, чем государство, значение SCED становится положительным. Тогда государство вынуждено ограничивать производство K^d более жестко, чем при совпадении ожиданий (частным случаем которого является параметрическая определенность).

Та же логика применима к рынку «чистого» капитала. Иными словами, если «чистый» сектор, по мнению регулятора, слишком оптимистичен в

отношении ЗТП, то государству потребуется ввести не субсидию, а налог на «чистый» капитал.

Отметим, что результат Предложения 1 не зависит ни от характера стохастичности модели, ни от конкретных априорных убеждений, которые могут быть у агентов. Достаточным условием возникновения ненулевых социальных издержек расхождения ожиданий является лишь неоднородность самих ожиданий.

Следующее Предложение обобщает два основных свойства SCED, важных для дальнейшего обсуждения.

Предложение 2 Для произвольного индекса $i \in \{c, d\}$:

1.

$$\text{sign}(SCED_t^i) = \text{sign}([q_0^i - q_0^p][(I_{t+1}^i)^{\alpha_i-1}|_{A_{t+1}>A_t} - (I_{t+1}^i)^{\alpha_i-1}|_{A_{t+1}=A_t}]); \quad (2.11)$$

2.

$$SCED_t^i \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad a.s. \quad (2.12)$$

Предложение 2 позволяет понять, как может выглядеть оптимальная налоговая траектория. Изначально, если производители в секторе «грязного» капитала ожидают быстрого роста производительности «чистого» капитала, а государство не разделяет этих ожиданий, то оно занижает налоги на производство «грязных» средств капитала или даже субсидирует его, чтобы избежать падения выпуска конечного продукта ниже оптимального уровня. Однако со временем расхождение ожиданий уменьшается, и тогда стимул к сокращению выбросов углерода становится преобладающим для регулятора, который в определенный момент вводит положительный налог на эти выбросы (хотя при любом конечном значении t он по-прежнему может быть ниже значения SCC на небольшую величину)¹⁴.

¹⁴Отметим, что второе утверждение Предложения 2 отражает известный результат о том, что байесовские агенты рано или поздно получают информацию о реальном состоянии окружающего мира вне зависимости от своих априорных убеждений (Cyert and DeGroot [1974]; Demers [1991]). Однако в данной

Теперь можно обсудить, при каких условиях в описываемой экономике может возникнуть ЗП. Вначале введем формальные определения различных степеней «зеленого» парадокса по аналогии с (Gronwald et al. 2017). Определим строгую климатическую политику следующим образом: $\tau^d = SCC, \tau^c = 0$. Иначе говоря, при этом режиме правительство полностью пренебрегает социальными издержками расхождения ожиданий. Такой вариант стоит обсудить, поскольку в настоящее время гетерогенность убеждений не находится в центре внимания при обсуждении климатической политики. Пусть P – некоторая политика, например оптимальная (обозначается индексом OP), «бизнес как обычно» (BAU) или строгая политика (S), а X_t^P – значение переменной X_t при этой политике.

Определение 1 Полуслабый (или слабейший) ЗП возникает при $D_t^{OP} > D_t^S$ для некоторого $t \geq 0$.

Определение 2 Политика P вызывает слабый ЗП, если $D_t^P > D_t^{BAU}$ для некоторого $t \geq 0$.

Определение 3 Политика P вызывает сильный ЗП, если:

$$\frac{1}{1+\chi} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (D_t^P)^{1+\chi} > \frac{1}{1+\chi} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (D_t^{BAU})^{1+\chi}. \quad (2.13)$$

Определение 4 Политика P вызывает экстремальный ЗП, если:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t W_t^P < \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t W_t^{BAU}. \quad (2.14)$$

Следует отметить, что здесь вводится новое определение «полуслабого» (или «слабейшего») ЗП, соответствующее случаю, когда выбросы углерода при ОП выше, чем при строгой политике (но при этом могут быть ниже, чем при BAU). Такая ситуация возникает, когда значения $SCED^d$ отрицательны по меньшей мере в некоторые периоды, поэтому дисконтированный поток углеродных налогов ниже при ОП, чем при строгой политике.

модели переход к состоянию «полной информированности» (или «рациональных ожиданий») представляет особый интерес, поскольку он происходит параллельно с климатическим переходом, свойствам которого (в частности, возникновению ЗП) посвящена настоящая работа.

Однако при оптимальной схеме налогообложения экономика может столкнуться с классическим слабым ЗП, если начальные значения $SCED^d$ отрицательны, существуют долго и настолько велики по абсолютной величине, что в уравнении Эйлера для производителя «грязного» капитала (см. уравнение (A.9) в Приложении) углеродные субсидии в начальные периоды превышают дисконтированные углеродные налоги в последующие периоды, поэтому уровень загрязнения в начальные периоды при ОП выше, чем при ВАУ. Если отрицательные значения $SCED^d$ сохраняются достаточно долго, при ОП может возникнуть сильный «зеленый» парадокс, то есть дисконтированная сумма дисполезности от загрязнения при такой политике может стать выше, чем при базовом сценарии.

Может показаться, что при оптимальной политике невозможен ни сильный, ни экстремальный ЗП, поскольку правительство, действующее с наилучшими намерениями, не будет предпринимать действий, ведущих к снижению дисконтированного потока благосостояния. Однако следует учесть, что в определение сильного и экстремального ЗП входит соответственно фактическое загрязнение и фактическое благосостояние. Если априорные убеждения регулятора существенно ошибочны (например, $q_0^p = 10^{-10}$, когда $\theta = \theta_H$), а убеждения компаний такими не являются, то оптимальная политика может привести к худшим результатам, чем при ВАУ. Кроме того, оптимальная политика, минимизирующая потери благосостояния в условиях отсутствия ограничений, формируется таким образом, чтобы оптимум достигался в среднем, а не для каждой реализации процесса $\{A_t\}_{t=0}^\infty$. Остается открытым вопрос: может ли при разумных предположениях произойти указанное резкое падение благосостояния.

Для ответа на него в следующем разделе применяются численные методы оценки вероятности наблюдения разных видов «зеленого» парадокса в описываемой экономике при различных значениях параметров модели.

3 Численные эксперименты

3.1 Метод решения и калибровка

Для решения модели, то есть для нахождения аппроксимации функции политики, отображающей текущее состояние экономики на управляющие воздействия агентов, в данной работе используется разновидность метода минимизации остаточных значений для уравнения Эйлера (Maliar et al. 2021). Суть его заключается в обучении нейронной сети таким образом, чтобы минимизировать среднюю сумму квадратичных остаточных значений для уравнений Эйлера:

$$\Xi_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l v_j R_j^2(s_i, s'_i(\phi)), \quad (3.1)$$

где:

n – размер батча,

l – количество уравнений Эйлера,

R_j^2 – квадрат остатка j -го уравнения Эйлера,

v_j – соответствующий вес (гиперпараметр алгоритма),

s и s' вектор состояний текущего и следующего периодов, соответственно,

а ϕ – вектор параметров нейронной сети¹⁵.

Для каждого i функция потерь вычисляется так: каждое состояние $s_t = (K_{t-1}^d, K_{t-1}^c, D_{t-1}, A_t, q_t^c, q_t^d, q_t^p)$ случайным образом выбирается из эргодического множества¹⁶ и передается нейронной сети, которая возвращает текущие управляющие воздействия (I_t^c, I_t^d и Φ_t – множитель Лагранжа для выбросов, из задачи социального планировщика¹⁷) используемые для расчета эндогенных состояний K_t^d, K_t^c, D_t и статических переменных. Затем вычис-

¹⁵Говоря точнее, используются остаточные значения для уравнения Эйлера, нормированные на соответствующие цены.

¹⁶В данной работе нас интересует переход из одного устойчивого состояния в другое, поэтому объем капитала и потерь равномерно выбираются из интервала между их прежними и новыми значениями в устойчивых состояниях; для получения выборки A_t сначала берется выборка m из дискретного равномерного распределения на интервале $[0, 200]$, а затем вычисляется $A_t = A_0(\lambda^{m+1} - 1)/(\lambda - 1)$; все апостериорные вероятности выбираются из $U[0, 1]$.

¹⁷С технической точки зрения, одна и та же сеть применяется для нахождения как централизованного, так и децентрализованного решения, но во втором случае полученный от сети результат, соответствующий Φ_t , не используется.

ляются два варианта перехода в экзогенное состояние $(A_{t+1}, q_{t+1}^c, q_{t+1}^d, q_{t+1}^p)$: с ростом A и без роста A ; для каждого рассчитываются управляющие воздействия и эндогенные переменные следующего периода, которые взвешиваются по соответствующим вероятностям с целью нахождения релевантных байесовских ожиданий в уравнении Эйлера.

В качестве архитектуры нейронной сети используется трехслойный перцептрон с сигмоидной активацией. Его аппроксимирующая способность оказалась достаточна для простой модели, используемой в этой работе. Обучение сети происходит с помощью алгоритма Adam, при этом выполняется 50 000 градиентных шагов с начальной скоростью обучения 0,003 (уменьшающейся в 3 раза каждые 20 000 шагов) и размером батча $n = 128$. Точность аппроксимации проверяется с помощью анализа средних траекторий модельных запасов капитала (сходятся ли их траектории к новому стационарному состоянию). Эта процедура (с соответствующими изменениями) используется для анализа всех представленных ниже моделей.

Обученная сеть используется для моделирования траекторий (K_t^d, K_t^c, D_t, W_t) при различных политиках для каждой из 10 000 предварительно смулированных траекторий $\{A_t\}$, длина которых составляет 1000 периодов. Чтобы оценить вероятность проявления слабого ЗП в период t вычисляется доля таких траекторий, для которых D_t^{BAU} меньше D_t^{OP} . Для оценки вероятности сильного (экстремального) ЗП вычисляется требуемая сумма для каждой траектории и затем производится их усреднение. Ожидаемое загрязнение в период t рассчитывается как среднее значение D_t по всем траекториям.

Далее в таблице 3.1 перечислены значения параметров модели, которые используются во всех численных экспериментах (если явно не указано иное). В этой работе внимание уделяется не столько количественным, сколько качественным результатам, поэтому значения, установленные для калибровки, не соответствуют полностью какой-либо конкретной стране или географическому региону, а выбраны с учетом следующих общих соображений. Предполагается, что оба запаса капитала симметричны во всех аспектах, кроме начальной производительности¹⁸, что позволяет сосредото-

¹⁸То есть они имеют одинаковую норму амортизации 0,025 (Baldwin et al. 2019, δ^D) и являются близ-

точиться исключительно на эффектах ЗТП. При этом мгновенный вред загрязнения является линейным в соответствии с (Gronwald et al. 2017)¹⁹; кроме того, принимаются экстремальные значения для априорных убеждений q_0^i , что позволяет усилить рассматриваемый эффект. Эластичность предельной полезности потребления η берется равной среднему значению по ОЭСР (Evans 2005)²⁰. Ставка процента принимается приблизительно равной 1% ($\beta = 0,99$), что примерно соответствует усредненной ставке ФРС США за годы, начиная с 2008 года, θ_L, θ_H выбраны так, чтобы между режимами было заметное различие, а λ – так, чтобы в новом стационарном состоянии производительность «зеленого» капитала была значительно выше «коричневого». При моделировании также используется предположение, что реальное состояние мира есть L .

3.2 Базовая модель при базовой калибровке

Численное моделирование показывает, что в базовой модели при оптимальной политике и базовой калибровке эффект слабого ЗП отсутствует²¹. Однако, в полном соответствии с теорией, чем сильнее вера в «зеленый» технический прогресс у компании в «грязном» секторе, тем меньшее загрязнение наблюдается в сценарии BAU (рис. 3.1). Более того, при условии $q_0^d > q_0^p$, в модели наблюдается слабейший ЗП (рис. 3.2).

кими заменителями (отсюда ξ, ν), но производительность «чистого» капитала изначально ниже в 2 раза. Норма амортизации капитала случайно совпала с нормой рассеивания углекислого газа в атмосфере (δ), взятой из <https://euanmearns.com/the-half-life-of-co2-in-earths-atmosphere-part-1/>

¹⁹Цель такой калибровки – сделать социальные издержки углерода постоянными, чтобы упростить моделирование строгой политики: из уравнения (2.9) следует, что $SCC \equiv \gamma\kappa_d/(1 - \beta(1 - \delta))$, если $\chi = 0$.

²⁰Предполагается, что энергия является единственным конечным продуктом, потребляемым домохозяйствами. На самом деле, обширный метаанализ, проведенный Labandeira et al. (2017), показывает, что краткосрочная эластичность спроса на электроэнергию ($-1/\eta$) имеет абсолютное значение 0,1 (хотя значение $-1/1,4 \approx -0,7$ попадает в интервалы, полученные в нескольких обзорах, согласно (Labandeira et al. 2017, Таблица 1, Electricity, Energy); кроме того, оно близко к оценкам для Швейцарии (Filippini 2011) и Норвегии (Nesbakken 1999)). Однако если принять $\eta = 10$, то оба запаса капитала оказываются ниже в новом стационарном состоянии, чем в начальном (так же происходит при альтернативной калибровке в соответствии с (Baldwin et al. 2019): $\xi = 0,46, \nu = 0,32, \delta_c = 0,04$), что кажется контринтуитивным. Запас «зеленого» капитала растет в новом устойчивом состоянии при $\eta = 10$, если предполагается, что λ ниже 0,9, но даже в этом случае разница между «старым» и «новым» K^c довольно мала (не говоря уже о том, что уменьшение λ снижает «потолок» производительности «зеленой» энергии).

²¹В действительности расчеты показывают наличие эффекта только в самые первые периоды; он не является устойчивым и исчезает, если нейронная сеть, используемая для аппроксимации функции политики, обучается на остаточных значениях для уравнения Эйлера, нормированных на значения соответствующих множителей Лагранжа в исходном стационарном состоянии. По этой причине такой эффект можно считать отсутствующим.

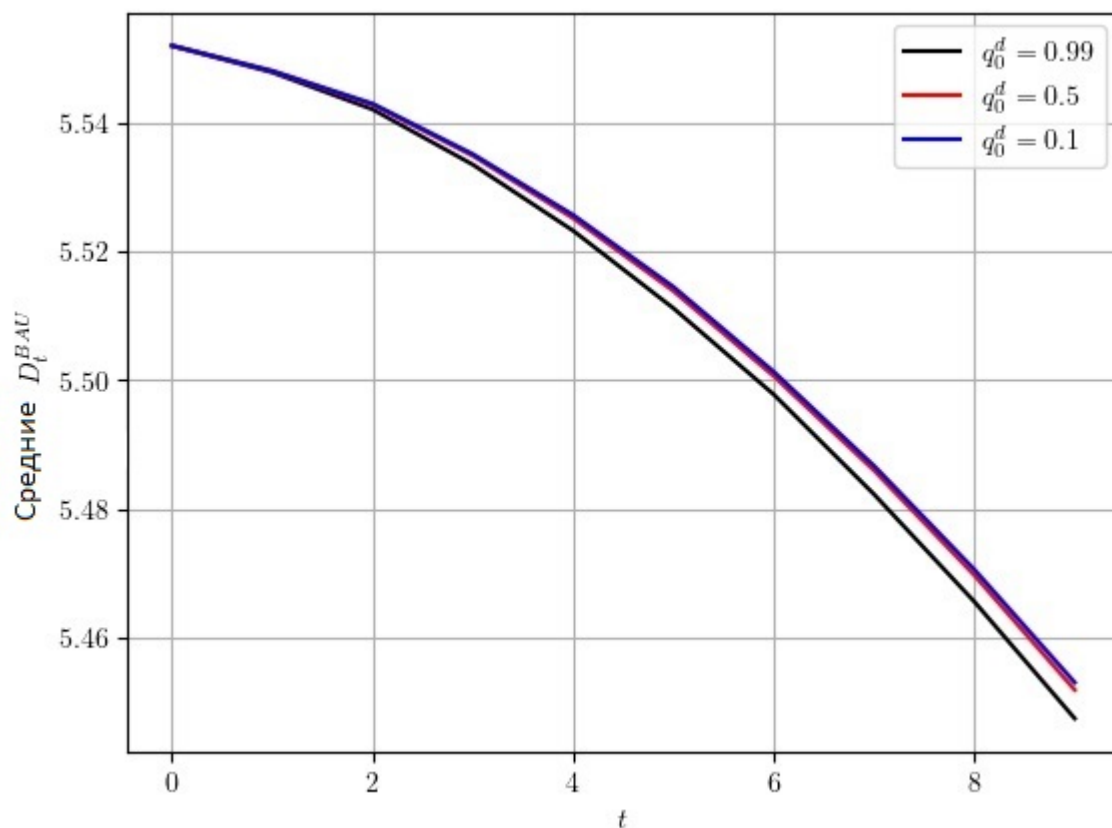
Таблица 3.1: Базовая калибровка

Параметр	Значение
η	1,4
χ	0
κ_d	0,01
β	0,99
λ	0,9
θ_L	0,2
θ_H	0,8
A_0	0,5
δ	0,025
γ	0,01
$\alpha_c = \alpha_d$	2
$\delta_c = \delta_d$	0,025
ξ	0,99
ν	0,5
A_y	1
q_0^p	0,01
q_0^d	0,99
q_0^c	0,99

Отсутствие слабого ЗП можно объяснить высокой скоростью байесовского обучения: апостериорные убеждения экономических агентов сходятся очень быстро, поэтому низкие углеродные налоги (или углеродные субсидии) действуют недостаточно долго, чтобы в уравнении Эйлера компенсировать высокие налоги на компании в «грязном» секторе. Кроме того, социальные издержки расхождения ожиданий могут быть недостаточно существенны по абсолютной величине, чтобы компенсировать высокие социальные издержки углерода в уравнении (2.9). В таком случае возникает естественный вопрос: может ли наблюдаться ЗП, если скорость обучения ниже, компании в значительной степени не принимают во внимание будущие налоги или регулятор менее озабочен изменениями климата? В следующих подразделах рассматривается влияние меньшей κ_d , меньшей β и большей консервативности агентов на вероятность появления ЗП.

Рис. 3.1: Базовая модель: ожидаемое загрязнение при сценарии BAU для различных значений q_0^d .

Источник: расчеты автора.

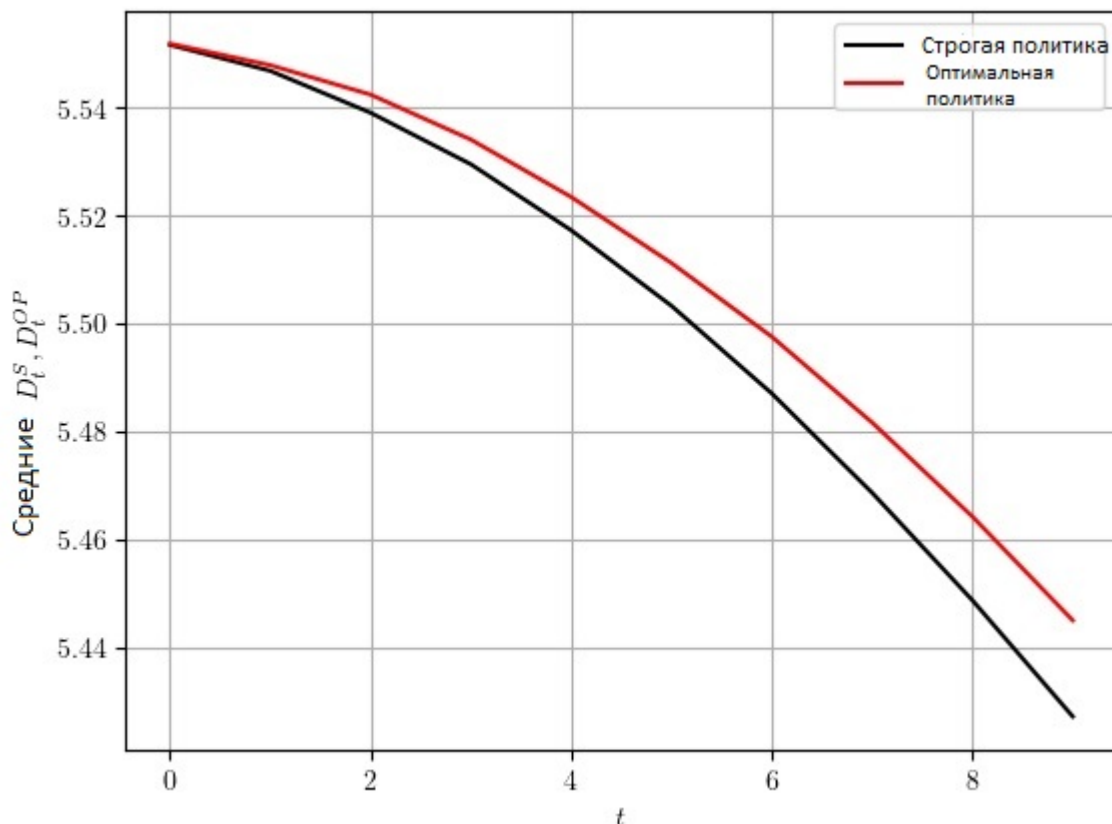


3.3 Базовая модель при меньшей β

Предположим, что коэффициент дисконтирования ниже (ставка процента выше). В этом случае компании в «грязном» секторе больше интересуются субсидиями в ближайшем времени, чем налогами в отдаленном будущем, тогда как население (и бенеvolentный регулятор) меньше беспокоится о будущих загрязнениях, поэтому социальные издержки углерода в каждом периоде будут ниже. Оба фактора способствуют возникновению ЗП, что подтверждается результатами (рис. 3.3). Более того, вероятность сильного ЗП равна 1 как для $\beta = 0,95$, так и для $\beta = 0,9$ (то есть $r \approx 0,053$ и $r \approx 0,11$ соответственно), а экстремальный ЗП возникает при $\beta = 0,9$ с вероятностью 0,13.

Рис. 3.2: Базовая модель: ожидаемое загрязнение при оптимальной и строгой политике.

Источник: расчеты автора



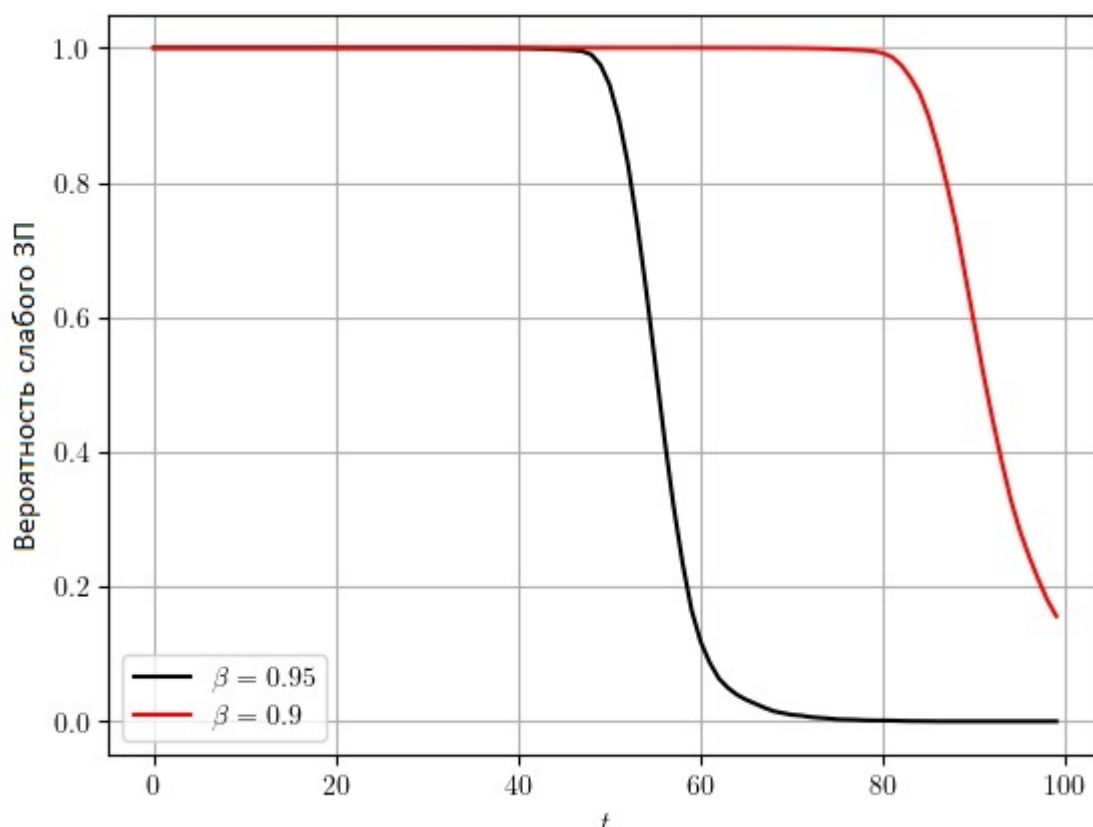
3.4 Базовая модель при меньшей κ_d

Предположим, что относительный весовой коэффициент вредных последствий загрязнения в функции общественного благосостояния (κ_d) ниже. В этом случае население (и беневоолентный регулятор) меньше обеспокоено изменениями климата, поэтому социальные издержки углерода в каждом периоде будут ниже, как и углеродные налоги, а углеродные субсидии, если они есть, выше. Снижение κ_d действительно ведет к слабому «зеленому» парадоксу (рис. 3.4). Однако вероятность сильного или экстремального ЗП всегда равна 0 из-за низкой продолжительности избыточного загрязнения при оптимальной политике.

3.5 Базовая модель при меньших θ_H, θ_L

Рассмотрим случай, когда вероятность увеличения A_t в обоих режимах ниже, чем при базовой калибровке, с одинаковым коэффициентом, то есть

Рис. 3.3: Базовая модель: вероятность слабого ЗП для разных значений β .
Источник: расчеты автора.



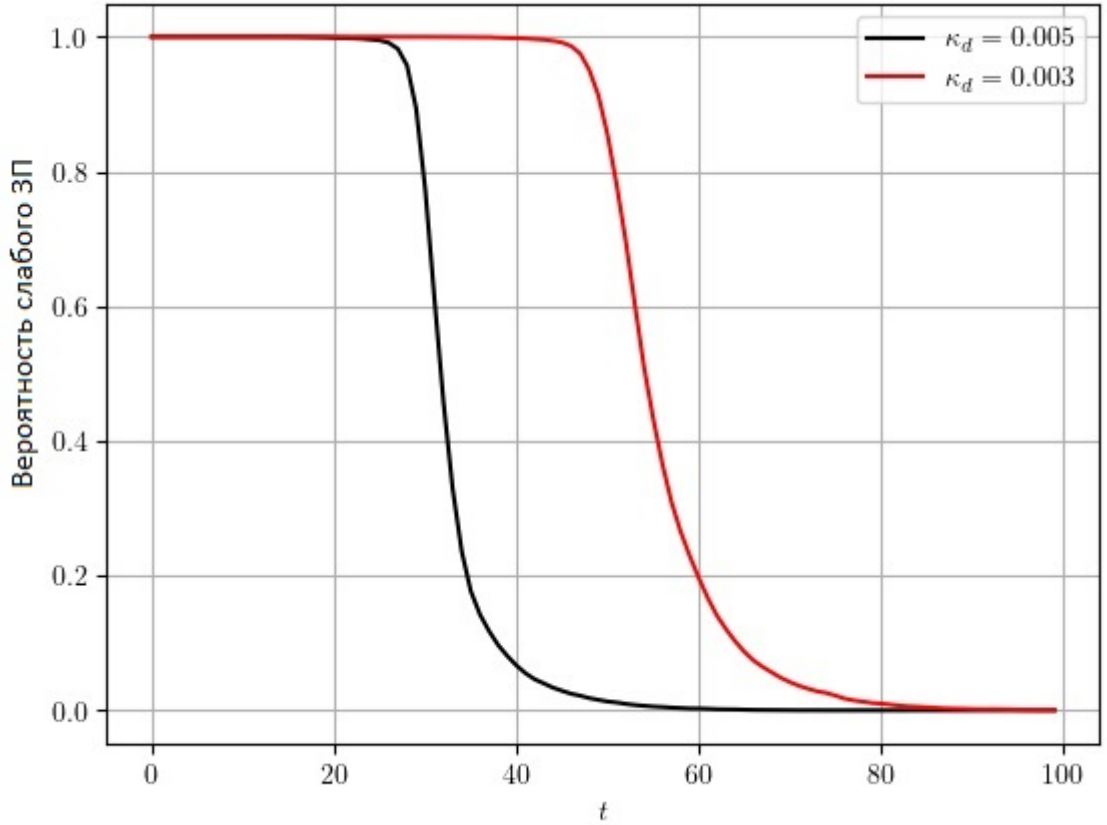
предположим, что $\theta_H = 0,6$, $\theta_L = 0,15$. При этом агентам становится сложнее отличить один режим от другого, поскольку в каждом из них A_t меняется реже. Очевидно, что в такой ситуации вероятность слабого ЗП существенно отлична от нуля (рис. 3.5). Однако избыточное загрязнение при ОП недостаточно продолжительно, чтобы вызвать сильный/экстремальный «зеленый» парадокс — его вероятность равна нулю и в этом случае.

3.6 Модель с консервативными агентами

Предположим, что экономические агенты обладают ограниченной рациональностью²² и неохотно меняют свои взгляды, так что обновление их

²²Обзор поведенческих моделей, релевантных для экономики климатических изменений, см. в работе (Gsothbauer and van den Bergh 2011).

Рис. 3.4: Базовая модель: вероятность слабого ЗП для разных значений κ_d .
Источник: расчеты автора.

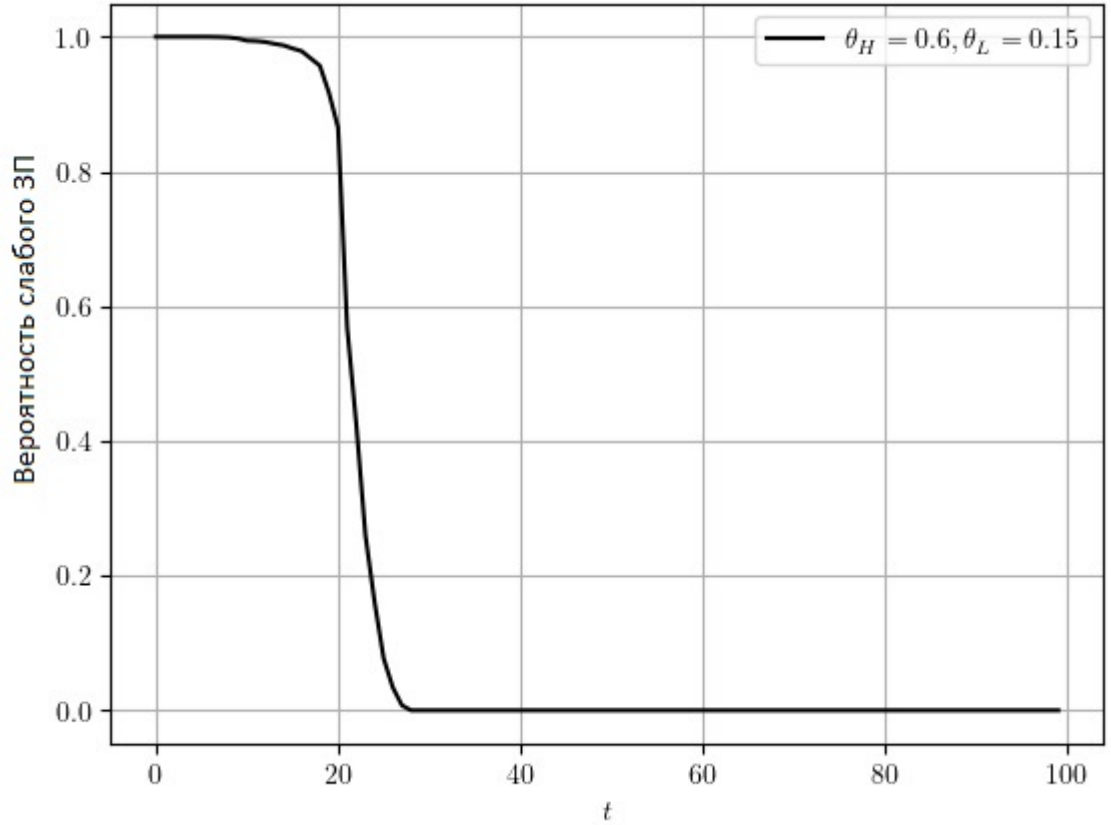


убеждений подчиняется следующему правилу:

$$q_t^i = \begin{cases} (1 - \omega) \frac{\theta_H q_{t-1}^i}{\theta_H q_{t-1}^i + \theta_L (1 - q_{t-1}^i)} + \omega q_{t-1}^i, & A_t > A_{t-1}, \\ (1 - \omega) \frac{(1 - \theta_H) q_{t-1}^i}{(1 - \theta_H) q_{t-1}^i + (1 - \theta_L) (1 - q_{t-1}^i)} + \omega q_{t-1}^i, & A_t = A_{t-1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\omega \in (0, 1)$. Допустим, для простоты, что ω одинакова для всех агентов. На рис. 3.6 показана вероятность наблюдения слабого ЗП в течение каждого периода для различных значений ω . Как и предполагалось ранее, сильный консерватизм в оценке вероятностей приводит к слабому ЗП. Кроме того, продолжительность эффекта ЗП возрастает с увеличением заякоренности (ω). Однако вероятность сильного/экстремального ЗП оказывается равной нулю, то есть высокий уровень загрязнения в начальные периоды не компенсирует его низкий уровень в дальнейшем.

Рис. 3.5: Базовая модель: вероятность слабого ЗП при меньших θ_H, θ_L .
Источник: расчеты автора.



3.7 Модель с добавлением шума в ЗТП

В завершение этого раздела отметим, что внесение информационного шума в процесс технических изменений, как свидетельствуют результаты Kelly and Kolstad (1999), затрудняет распознавание соответствующих тенденций участниками рынка, поэтому их обучение (а также сокращение разрыва ожиданий) происходит медленнее. Можно предположить, что это ведет к тем же результатам, что и в случае консервативных агентов.

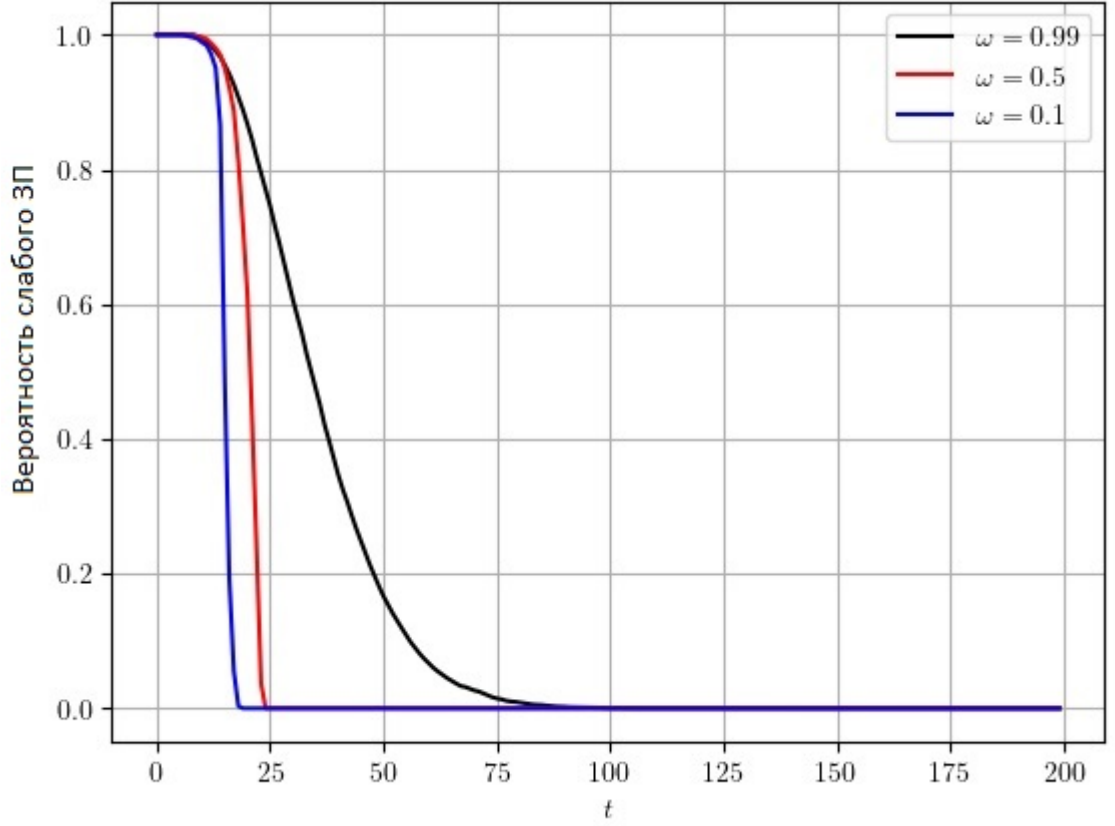
Для проверки этой гипотезы допустим, что технологию можно разложить на две отдельные ненаблюдаемые компоненты – трендовую A_t^T и циклическую A_t^C :

$$A_t = A_t^T A_t^C, \quad A_t^C = \exp(\varepsilon_t), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right). \quad (3.3)$$

В данном случае изменение тренда описывается стандартным уравнением (2.5), а циклическая компонента представляет собой логарифмически

Рис. 3.6: Модель с консервативными агентами: вероятность слабого ЗП для разных значений ω .

Источник: расчеты автора.



нормальный белый шум с нулевой автокорреляцией, средним значением, равным 1, и стандартным отклонением, равным $\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$.

Каждая q_t^i обновляется в соответствии с правилом:

$$q_t^i = \frac{f_t(A_t|H)q_{t-1}^i}{f_t(A_t|H)q_{t-1}^i + f_t(A_t|L)(1 - q_{t-1}^i)}, \quad (3.4)$$

где $f_t(A_t|j)$ – плотность вероятности $\log A_t$ при условии, что экономика находится в j -м режиме, $j \in \{H, L\}$, которая оценивается исходя из наблюдаемого значения A_t . По формуле полной вероятности,

$$f_t(x|j) = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \theta_j^k (1 - \theta_j)^{t-k} \mathcal{N}(x | \log \mu_k - \sigma^2/2, \sigma^2), \quad (3.5)$$

$$\mu_k = \frac{A_0(\lambda^{k+1} - 1)}{\lambda - 1} \quad (3.6)$$

где $\mathcal{N}(x|a, b^2)$ – функция плотности вероятности нормального распределе-

ния со средним значением a и стандартным отклонением b .

При вычислении ожидаемых значений в уравнениях Эйлера используется простой метод Монте-Карло. Вначале t включается в вектор состояний²³; затем для заданного t для каждого режима (H, L) семплируется 100 значений $\log A_{t+1}$ из распределения (3.5); для каждого из этих значений вычисляются требуемые переменные следующего периода, которые усредняются (чтобы найти ожидаемые значения при заданном режиме $\mathbb{E}[X_{t+1}|j], j \in \{H, L\}$). После этого в соответствии с формулой полного математического ожидания определяется средневзвешенное этих средних значений: $\mathbb{E}_t^i X_{t+1} = q_t^i \mathbb{E}[X_{t+1}|H] + (1 - q_t^i) \mathbb{E}[X_{t+1}|L]$.

Интересно, что добавление информационного шума в процесс технических изменений²⁴ приводит к нулевой вероятности слабого ЗП. Чтобы без строгого доказательства понять идею, лежащую в основе этого результата, рассмотрим следующее Предложение 3 (которое представляет определенный интерес само по себе):

Предложение 3 *Если $\xi + \eta > 1$, то при прочих равных условиях ожидаемая в момент времени t цена «грязного» капитала в следующем периоде выше в модели с добавлением шума в процесс технических изменений, чем в базовой модели.*

Результат согласуется с выводом, сделанным в работе (Hartman 1972): рост неопределенности (в виде спреда, сохраняющего среднее значение) относительно будущих цен на продукцию компании приводит к увеличению ожидаемых предельных доходов и текущих инвестиций²⁵. Однако Предложение 3 показывает, что та же логика применима, если возрастает неопределенность в отношении производительности конкурентов, а не цен на собственную продукцию.

Симметричное утверждение для p^c в общем случае неверно, поскольку эта ценовая функция не является ни вогнутой, ни выпуклой для всех значений A . Однако если предположить, что запасы капитала равны их

²³В этом подразделе распределение A_{t+1} зависит не только от A_t , но и от самого t . Для решения зашумленной модели в код были внесены и другие второстепенные модификации, которые здесь опускаются из-за их чисто технического характера.

²⁴Для стандартного отклонения A_t^C были проверены значения 0,5, 0,75 и 1.

²⁵Оба результата фактически основываются на неравенстве Йенсена.

начальным значениям в стационарном состоянии и что $A \leq 5$, то легко понять, что p^c и p^d соответственно строго вогнуты и выпуклы по A (рис. 3.7). Таким образом, вероятно, что при более волатильном A ожидаемая цена «чистого» («грязного») капитала будет ниже (выше) – во всяком случае при малых t .

Поэтому изначально и конкурирующие компании, и социальный планировщик имеют повышенную (пониженную) склонность к инвестированию в «грязный» («чистый») капитал при наличии повышенной неопределенности. Однако социальный планировщик наращивает K^d в меньшей степени, поскольку его беспокоит рост загрязнения окружающей среды. По этой причине стремление регулятора субсидировать производство «грязного» капитала в модели с добавлением «шума» ниже. Таким образом, повышение неопределенности в отношении производительности «зеленого» капитала противодействует возникновению ЗП.

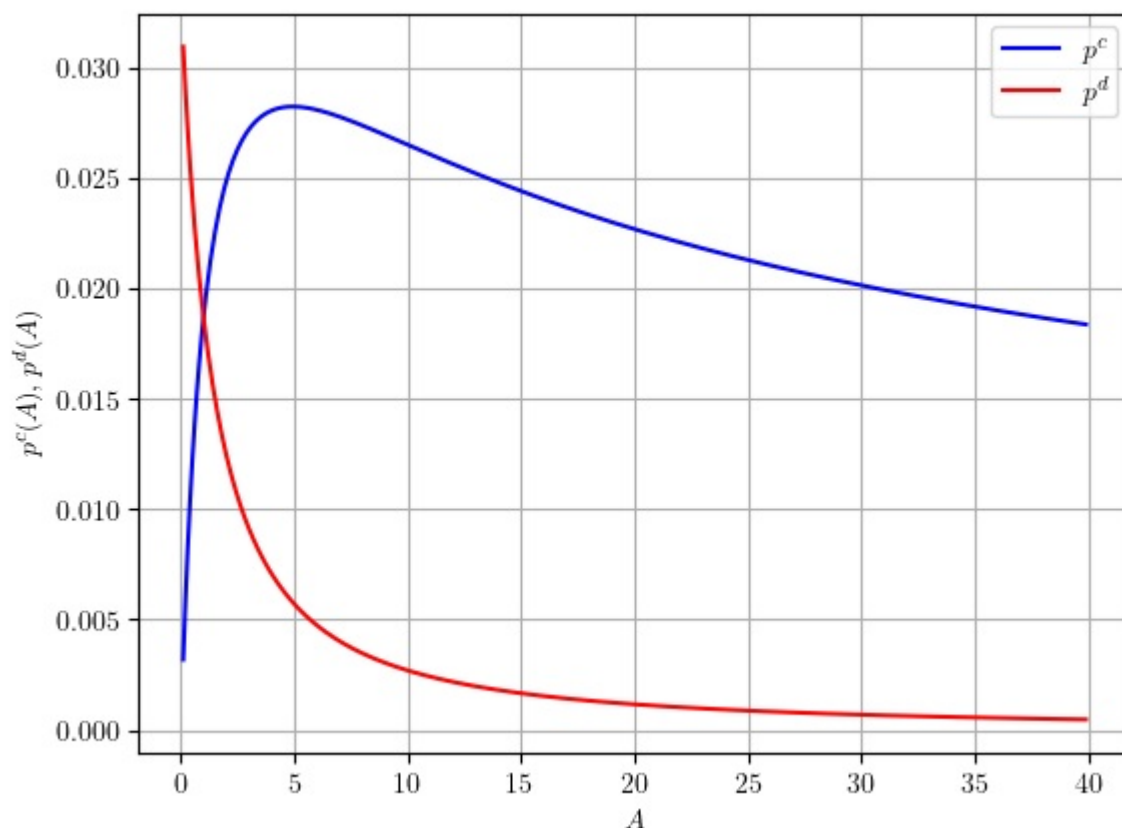
4 Обсуждение и выводы

В работе показано, что «зеленый» парадокс может возникнуть в экономике даже без исчерпаемых ресурсов при наличии в ней «чистых» и «грязных» производственных мощностей по следующей причине. Если в экологически чистом секторе технические изменения происходят с неизвестной скоростью, экономические агенты вынуждены формировать ожидания относительно будущего развития технологий, опираясь на теорему Байеса, и принимать соответствующие решения. Когда руководители компаний, производящих «грязные» средства производства, априори ожидают, что из-за технического прогресса спрос на их продукцию будет сокращаться быстрее, чем предполагает государство, правительству придется снижать углеродный налог или даже субсидировать инвестиции в «грязный» капитал, чтобы избежать текущего дефицита продукции. При этом, если приток субсидий будет достаточно продолжительным, выбросы CO_2 могут возрасти.

Механизм «зеленого» парадокса, представленный в настоящей работе, не является стандартным. Еще существеннее то, что, в отличие от многих

Рис. 3.7: Модель с добавлением «шума» в процесс технических изменений: цены двух видов капитала для различных значений A при начальных значениях K^d, K^c .

Источник: расчеты автора.



существующих моделей, эффект ЗП при оптимальной политике всегда является оптимальным и желательным (по крайней мере, априори) с точки зрения общественного благосостояния. Реализация такой оптимальной (но парадоксальной) политики была бы сложной задачей.

Однако численный анализ дает обнадеживающие результаты: при оптимальной политике даже слабый ЗП (то есть временное увеличение выбросов) является предельным случаем. Его возникновение возможно при очень низком весовом коэффициенте вредных последствий выбросов в функции общественного благосостояния, низком темпе технического прогрессе (при любом режиме) или при консервативном обновлении апостериорных убеждений. Первое условие на практике не выполняется, так как даже при базовой калибровке выбросы в новом устойчивом состоянии при ОП составляют 35% от выбросов в сценарии BAU, – тогда как в реальном мире политики обычно ратуют за полностью безуглеродную экономику. В свою очередь,

процентные ставки в развитых странах в 2010-х гг. были на довольно низком уровне, и неясно, долго ли продлится их текущее повышение. Кроме того, последние исследования в области когнитивной психологии не подтверждают эмпирическую релевантность консерватизма (Woike et al. 2023).

Помимо этого, для ЗП требуется особое соотношение между априорными убеждениями разных агентов, а именно: $q_0^d > q_0^p$, то есть будущее «зеленых» технологий должно казаться производителю грязных средств производства более оптимистичным, чем регулятору. Если неравенство имеет противоположный знак, оптимальный углеродный налог превышает социальные издержки углерода. Вопрос о том, какие значения принимают эти параметры в реальном мире, остается открытым для эмпирического изучения в будущем. Исследования в этом направлении достаточно актуальны, поскольку (и это основное следствие настоящей работы применительно к регулирующим органам) оптимальный углеродный налог отличается от социальных издержек углерода, кроме случая, когда выполняется условие $q_0^d = q_0^p$. К тому же для определения количественных параметров оптимальной климатической политики требуется учет гетерогенных убеждений в моделях с более сложной структурой, чем представленная здесь.

В заключение следует отметить, что будущие теоретические исследования могут вестись в нескольких направлениях. Во-первых, в настоящей работе технические изменения в «зеленом» секторе рассматриваются исключительно как экзогенный процесс. Однако в целом ряде статей, например (Nachtigall and Rübbelke 2016; Baldwin et al. 2019), предполагается, что этот процесс зависит от объема производства или капитала в чистом секторе. Введение такого механизма обратной связи (при сохранении предположений о параметрической неопределенности и стохастичности) не только сделает модель более реалистичной, но и позволит агентам экспериментировать, то есть изменять свои управляющие воздействия для повышения информативности сигнала, обучаться активно. Кроме того, не стоит забывать, что в реальном мире добыча ископаемого топлива стоит дорого, а запасы этого топлива ограничены. Влияние этих особенностей в условиях байесовского обучения и гетерогенные априорных убеждений еще предстоит изучить.

Также было бы интересно изучить, можно ли использовать «зеленые» субсидии вместо «коричневых», если ЗП возникает в соответствии с описанным выше механизмом. Другими словами, вопрос в том, при каких условиях (если таковые имеются) бенеvolentное правительство решит увеличить запас «чистого» капитала, чтобы компенсировать низкий запас «грязного», чтобы избежать недовыработки энергии. Сравнение относительных преимуществ различных политических инструментов (например, когда только один из них доступен регулятору) в контексте представленной выше модели остается предметом для дальнейших исследований.

Далее, единственным источником (параметрической) неопределенности, рассмотренным в настоящей работе, является изменение производительности «зеленого» капитала. Предстоит понять, как на климатический переход в условиях байесовского обучения и неоднородности гетерогенных убеждений агентов влияет неопределенность параметров чувствительности климата, политической обстановки, условий производства в секторе «грязной» энергетики, а также в других отраслях промышленности и так далее.

Другой комплекс не рассматривавшихся в данной работе вопросов, касающихся выбора политики, относится к сигналам, влияющим на формирование ожиданий²⁶: каковы эти сигналы; может ли регулятор контролировать их; может ли регулирование этих сигналов (частично) заменить углеродные налоги или «зеленые» субсидии²⁷; возможно ли устранить разрыв в ожиданиях в начале «зеленого» перехода, чтобы не допустить трансформации строгой политики, предпочитаемой в настоящее время, в неоптимальную? Не исключено, что ответы на эти вопросы окажут значительное влияние на наши представления об управлении изменениями климата.

²⁶В этой работе рассматривается единственный сигнал относительно будущего технологического развития – текущее состояние самих технологий. Может возникнуть вопрос, влияют ли на динамику убеждений экономических агентов какие-либо научные прогнозы относительно траектории $\{A_t\}$.

²⁷Согласно (Demers 1991), «байесовские» компании снижают текущий уровень необратимых инвестиций в том случае, если они ожидают информативного сигнала относительно будущих рыночных условий. В связи с этим регулятор может столкнуться с необходимостью принять ряд неочевидных решений, например, выбрать, куда направить определенную сумму бюджетных средств: на «зеленые» субсидии или на исследования, которые когда-нибудь прояснят неопределенность, с которой сейчас имеют дело производители «грязных» средств производства.

Список литературы

- Baldwin, Elizabeth, Yongyang Cai and Karlygash Kuralbayeva (2019). *To Build or not to Build? Capital Stocks and Climate Policy*. OxCarre Working Papers 204, Oxford Centre for the Analysis of Resource Rich Economies, University of Oxford.
- Bréchet, Thierry, Carmen Camacho and Vladimir M. Veliov (2014). “Model predictive control, the economy, and the issue of global warming”. B: *Annals of Operations Research* 220.1, c. 25—48.
- Cyert, Richard M. and Morris H. DeGroot (1974). “Rational Expectations and Bayesian Analysis”. B: *Journal of Political Economy* 82.3, c. 521—536.
- Dalby, Peder A.O. et al. (2018). “Green investment under policy uncertainty and Bayesian learning”. B: *Energy* 161, c. 1262—1281.
- Demers, Michel (1991). “Investment under Uncertainty, Irreversibility and the Arrival of Information Over Time”. B: *Review of Economic Studies* 58.2, c. 333—350.
- Evans, David (2005). “The Elasticity of Marginal Utility of Consumption: Estimates for 20 OECD Countries”. B: *Fiscal Studies* 26.2, c. 197—224.
- Filippini, Massimo (2011). “Short- and long-run time-of-use price elasticities in Swiss residential electricity demand”. B: *Energy Policy* 39.10, c. 5811—5817.
- Fu, Wentao and Antoine Le Riche (2021). “Endogenous growth model with Bayesian learning and technology selection”. B: *Mathematical Social Sciences* 114, c. 58—71.
- García-León, David (2016). *Adapting to Climate Change: an Analysis under Uncertainty*. Working Papers 2016.10, Fondazione Eni Enrico Mattei.
- Gronwald, Marc, Ngo Van Long and Luise Roepke (2017). *Three Degrees of Green Paradox: The Weak, The Strong, and the Extreme Green Paradox*. Cahiers de recherche 02-2017, Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative, CIREQ.
- Gsottbauer, Elisabeth and Jeroen C. J. M. van den Bergh (2011). “Environmental Policy Theory Given Bounded Rationality and Other-regarding Preferences”. B: *Environmental and Resource Economics* 49, c. 263—304.

- Hannesson, Rögnvaldur (2018). *The Green Paradox and learning by doing*. Discussion Papers 2018/17, Norwegian School of Economics, Department of Business and Management Science.
- Hartman, Richard (1972). “The effects of price and cost uncertainty on investment.” B: *Journal of Economic Theory* 5.2, c. 258—266.
- Hotelling, Harold (1931). “The economics of exhaustible resources”. B: *Journal of Political Economy* 39.2, c. 137—175.
- Hwang, In Chang, Frédéric Reynès and Richard S.J. Tol (2017). “The effect of learning on climate policy under fat-tailed risk”. B: *Resource and Energy Economics* 48, c. 1—18.
- Jensen, Sverre, Kristina Mohlin et al. (2015). “An Introduction to the Green Paradox: The Unintended Consequences of Climate Policies”. Англ. B: *Review of Environmental Economics and Policy* 9.2, c. 246—265.
- Jensen, Sverre and Christian P. Traeger (2014). “Optimal climate change mitigation under long-term growth uncertainty: Stochastic integrated assessment and analytic findings”. B: *European Economic Review* 69, c. 104—125.
- Jin, Wei and Zhong Xiang Zhang (2019). *Capital Accumulation, Green Paradox, and Stranded Assets: An Endogenous Growth Perspective*. Working Papers 2018.33, Fondazione Eni Enrico Mattei.
- Kamihigashi, Takashi (2005). “Necessity of the transversality condition for stochastic models with bounded or CRRA utility”. B: *Journal of Economic Dynamics and Control* 29.8, c. 1313—1329.
- Karp, Larry and Jiangfeng Zhang (2001). *Bayesian Learning and the Regulation of Greenhouse Gas Emissions*. UC Berkeley: Department of Agricultural and Resource Economics. URL: <https://escholarship.org/uc/item/2fr0783c>.
- Kelly, David and Charles Kolstad (1999). “Bayesian learning, pollution, and growth”. B: *Journal of Economic Dynamics and Control* 23.4, c. 491—518.
- Kiseleva, Tatiana (2016). “Heterogeneous Beliefs and Climate Catastrophes”. B: *Environmental and Resource Economics* 65.3, c. 599—622.
- Labandeira, Xavier, José M. Labeaga and Xiral López-Otero (2017). “A meta-analysis on the price elasticity of energy demand”. B: *Energy Policy* 102, c. 549—568.

- Lemoine, Derek and Ivan Rudik (2017). “Managing Climate Change Under Uncertainty: Recursive Integrated Assessment at an Inflection Point”. B: *Annual Review of Resource Economics* 9, c. 117–142.
- Maliar, Lilia, Serguei Maliar and Pablo Winant (2021). “Deep learning for solving dynamic economic models”. B: *Journal of Monetary Economics* 122, c. 76–101.
- Mirman, Leonard J., Kevin Reffett and Marc Santugini (2016). “On learning and growth”. B: *Economic Theory* 61.4, c. 641–684.
- Nachtigall, Daniel and Dirk Rübelke (2016). “The green paradox and learning-by-doing in the renewable energy sector”. B: *Resource and Energy Economics* 43, c. 74–92.
- Nesbakken, Runa (1999). “Price sensitivity of residential energy consumption in Norway”. B: *Energy Economics* 21.6, c. 493–515.
- Nutz, Marcel and Florian Stebegg (2022). “Climate Change Adaptation under Heterogeneous Beliefs”. B: *Mathematics and Financial Economics* 16, c. 481–508.
- Rudik, Ivan, Derek Lemoine and Maxwell Rosenthal (2018). *General Bayesian Learning in Dynamic Stochastic Models: Estimating the Value of Science Policy*. 2018 Meeting Papers 369, Society for Economic Dynamics.
- Sinn, Hans-Werner (2008). “Public policies against global warming: a supply side approach”. B: *International Tax and Public Finance* 15.4, c. 360–394.
- (2012). *The Green Paradox: A supply-side approach to global warming*. The MIT Press.
- Smulders, Sjak, Yacov Tsur and Amos Zemel (2012). “Announcing climate policy: Can a green paradox arise without scarcity?” B: *Journal of Environmental Economics and Management* 64.3, c. 364–376.
- Woike, Jan K., Ralph Hertwig and Gerd Gigerenzer (2023). “Heterogeneity of rules in Bayesian reasoning: A toolbox analysis”. B: *Cognitive Psychology* 143, c. 101564.

А Приложение

А.1 Аналитическое описание рыночного равновесия

Производитель энергии максимизирует свою внутрипериодную прибыль по K_t^c, K_t^d :

$$p_t A_y [\nu (A_t K_t^c)^\xi + (1 - \nu) (K_t^d)^\xi]^{1/\xi} - p_t^c K_t^c - p_t^d K_t^d \rightarrow \max. \quad (\text{A.1})$$

Условия первого порядка:

$$p_t^c = p_t \nu (A_y A_t)^\xi \left(\frac{Y_t}{K_t^c} \right)^{1-\xi}, \quad (\text{A.2})$$

$$p_t^d = p_t (1 - \nu) (A_y)^\xi \left(\frac{Y_t}{K_t^d} \right)^{1-\xi}. \quad (\text{A.3})$$

Каждая компания, производящая капитал ($i \in \{c, d\}$), максимизирует по I_t^i, K_t^i свою ожидаемую прибыль при условии соблюдения закона движения соответствующего запаса капитала, начальных условий и условий трансверсальности (Kamihigashi [2005](#)):

$$\mathbb{E}_0^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ((p_t^i - \tau_t^i) K_t^i - (I_t^i)^{\alpha_i}) \rightarrow \max \quad (\text{A.4})$$

$$\text{s.t. } K_t^i = (1 - \delta_i) K_{t-1}^i + I_t^i, \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0^i \beta^t (p_t^i - \tau_t^i) K_t^i = 0, \quad K_{-1}^i > 0 \text{ задано.} \quad (\text{A.6})$$

Соответствующий лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ((p_t^i - \tau_t^i) K_t^i - (I_t^i)^{\alpha_i} - \mu_t^i (K_t^i - (1 - \delta_i) K_{t-1}^i - I_t^i)). \quad (\text{A.7})$$

Условия первого порядка:

$$-\alpha_i (I_t^i)^{\alpha_i-1} + \mu_t^i = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$p_t^i - \tau_t^i - \mu_t^i + \beta (1 - \delta_i) \mathbb{E}_t^i \mu_{t+1}^i = 0, \quad (\text{A.9})$$

Рынки «чистого» и «грязного» капитала уравновешены только в том случае, когда:

$$p_t \nu (A_y A_t)^\xi \left(\frac{Y_t}{K_t^c} \right)^{1-\xi} - \tau_t^c = \mu_t^c - \beta(1 - \delta_c) \mathbb{E}_t^c \mu_{t+1}^c, \quad (\text{A.10})$$

$$p_t (1 - \nu) (A_y)^\xi \left(\frac{Y_t}{K_t^d} \right)^{1-\xi} - \tau_t^d = \mu_t^d - \beta(1 - \delta_d) \mathbb{E}_t^d \mu_{t+1}^d. \quad (\text{A.11})$$

Закон движения для объема загрязнений и спрос на энергию задаются следующим образом:

$$D_t = (1 - \delta) D_{t-1} + \gamma K_t^d, \quad (\text{A.12})$$

$$p_t = Y_t^{-\eta}, \quad (\text{A.13})$$

соответственно.

A.2 Аналитическое описание решения социального планировщика

Социальный планировщик максимизирует следующий лагранжиан по $Y_t, D_t, I_t^c, I_t^d, K_t^c, K_t^d$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathbb{E}_0^p \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{Y_t^{1-\eta}}{1-\eta} - [(I_t^d)^{\alpha_d} + (I_t^c)^{\alpha_c}] - \kappa_d \frac{D_t^{1+\chi}}{1+\chi} \right. \\ & - \Lambda_t \left(Y_t - A_y [\nu (A_t K_t^c)^\xi + (1 - \nu) (K_t^d)^\xi]^{1/\xi} \right) \\ & - \Phi_t (D_t - (1 - \delta) D_{t-1} - \gamma K_t^d) \\ & - \Phi_t^d (K_t^d - (1 - \delta_d) K_{t-1}^d - (I_t^d)^{\alpha_d}) \\ & \left. - \Phi_t^c (K_t^c - (1 - \delta_c) K_{t-1}^c - (I_t^c)^{\alpha_c}) \right] \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Условия первого порядка:

$$Y_t^{-\eta} - \Lambda_t = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$-\kappa_d D_t^\chi - \Phi_t + \beta(1 - \delta) \mathbb{E}_t^p \Phi_{t+1} = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\Lambda_t \nu (A_y A_t)^\xi \left(\frac{Y_t}{K_t^c} \right)^{1-\xi} - \Phi_t^c + \beta(1 - \delta_c) \mathbb{E}_t^p \Phi_{t+1}^c = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\Lambda_t (1 - \nu) (A_y)^\xi \left(\frac{Y_t}{K_t^d} \right)^{1-\xi} + \gamma \Phi_t - \Phi_t^d + \beta(1 - \delta_d) \mathbb{E}_t^p \Phi_{t+1}^d = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$-\alpha_c (I_t^c)^{\alpha_c-1} + \Phi_t^c = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$-\alpha_d (I_t^d)^{\alpha_d-1} + \Phi_t^d = 0, \quad (\text{A.20})$$

А.3 Доказательство Предложения 1

Из (A.20)

$$\Phi_t^d = \alpha_d (I_t^d)^{\alpha_d-1}. \quad (\text{A.21})$$

Подставим это выражение и (A.15) в (A.18) и получим:

$$\begin{aligned} & Y_t^{-\eta} (1 - \nu) (A_y)^\xi \left(\frac{Y_t}{K_t^d} \right)^{1-\xi} + \gamma \Phi_t - \alpha_d (I_t^d)^{\alpha_d-1} \\ & + \beta(1 - \delta_d) \mathbb{E}_t^p (\alpha_d (I_{t+1}^d)^{\alpha_d-1}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Затем вычтем (A.22) из (A.11) и с учетом уравнений (A.8, A.13) получим:

$$-\tau_t^d - \gamma \Phi_t + \beta(1 - \delta_d) \alpha_d [\mathbb{E}_t^d ((I_{t+1}^d)^{\alpha_d-1}) - \mathbb{E}_t^p ((I_{t+1}^d)^{\alpha_d-1})] = 0, \quad (\text{A.23})$$

Наконец, из (A.16)

$$\Phi_t = -\kappa_d D_t^\chi + \beta(1 - \delta) \mathbb{E}_t^p \Phi_{t+1}, \quad (\text{A.24})$$

поэтому (A.23) можно переписать как:

$$\begin{aligned} \tau_t^d &= \kappa_d \gamma [D_t^\chi + \beta(1 - \delta) \mathbb{E}_t^p (D_{t+1}^\chi + \beta(1 - \delta) D_{t+2}^\chi + \dots)] \\ &+ \beta(1 - \delta_d) \alpha_d [\mathbb{E}_t^d ((I_{t+1}^d)^{\alpha_d-1}) - \mathbb{E}_t^p ((I_{t+1}^d)^{\alpha_d-1})]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Беневолентное правительство воспроизводит решение социального планировщика, вводя налоги, так что оптимальное значение $\hat{\tau}_t^d$ задается предыдущей формулой. Результат для $\hat{\tau}_t^c$ можно получить аналогичным образом исходя из уравнений (A.10) и (A.17). Другие рынки не искажены экстерналиями, поэтому оптимальная политика полностью характеризуется $\hat{\tau}_t^d, \hat{\tau}_t^c$.

A.4 Доказательство Предложения 2

По определению, для произвольной переменной X_t и произвольных индексов $i, j \in \{p, c, d\}$:

$$\mathbb{E}_t^i X_{t+1} = z_t^i X_{t+1}|_{A_{t+1} > A_t} + (1 - z_t^i) X_{t+1}|_{A_{t+1} = A_t}, \quad (\text{A.26})$$

где $z_t^i = \Pr(A_{t+1} > A_t | q_t^i) = \theta_H q_t^i + \theta_L (1 - q_t^i)$. Значит,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^i X_{t+1} - \mathbb{E}_t^j X_{t+1} &= (z_t^i - z_t^j)(X_{t+1}|_{A_{t+1} > A_t} - X_{t+1}|_{A_{t+1} = A_t}) \\ &= (\theta_H - \theta_L)(q_t^i - q_t^j)(X_{t+1}|_{A_{t+1} > A_t} - X_{t+1}|_{A_{t+1} = A_t}). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Из (2.8):

$$q_t^i - q_t^j = \begin{cases} \frac{\theta_H \theta_L (q_{t-1}^i - q_{t-1}^j)}{[\theta_H q_{t-1}^i + \theta_L (1 - q_{t-1}^i)][\theta_H q_{t-1}^j + \theta_L (1 - q_{t-1}^j)]}, & A_t > A_{t-1}, \\ \frac{(1 - \theta_H)(1 - \theta_L)(q_{t-1}^i - q_{t-1}^j)}{[(1 - \theta_H)q_{t-1}^i + (1 - \theta_L)(1 - q_{t-1}^i)][(1 - \theta_H)q_{t-1}^j + (1 - \theta_L)(1 - q_{t-1}^j)]}, & A_t = A_{t-1}. \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Таким образом, $q_{t-1}^i - q_{t-1}^j \geq 0 \Rightarrow q_t^i - q_t^j \geq 0$. Отсюда, итерируя предыдущее неравенство, $q_0^i - q_0^j \geq 0 \Rightarrow q_t^i - q_t^j \geq 0$. В итоге,

$$\text{sign}(\mathbb{E}_t^i X_{t+1} - \mathbb{E}_t^j X_{t+1}) = \text{sign}([q_0^i - q_0^j][X_{t+1}|_{A_{t+1} > A_t} - X_{t+1}|_{A_{t+1} = A_t}]). \quad (\text{A.29})$$

Первое утверждение Предложения 2 следует непосредственно из приведенной выше формулы.

Для доказательства второго утверждения этого Предложения заметим,

что последовательность

$$\{I_{t+1}^i | A_{t+1} > A_t - I_{t+1}^i | A_{t+1} = A_t\}_{t=0}^\infty \quad (\text{A.30})$$

ограничена, поскольку значения I_t^i ограничены²⁸. Поэтому достаточно показать, что последовательность $\{q_t^i - q_t^j\}_{t=0}^\infty$ сходится к 0 почти наверное. Для этого запишем (2.8) в виде:

$$q_t^i = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{\theta_L}{\theta_H} \left(\frac{1}{q_{t-1}^i} - 1 \right)}, & A_t > A_{t-1}, \\ \frac{1}{1 + \frac{1-\theta_L}{1-\theta_H} \left(\frac{1}{q_{t-1}^i} - 1 \right)}, & A_t = A_{t-1}. \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Путем обратной итерации этой формулы получаем:

$$q_t^i = \frac{1}{1 + \left(\frac{\theta_L}{\theta_H} \right)^m \left(\frac{1-\theta_L}{1-\theta_H} \right)^{t-m} \left(\frac{1}{q_0^i} - 1 \right)}. \quad (\text{A.32})$$

Если реальное состояние окружающего мира есть $\theta = \theta_j, j \in \{H, L\}$, то в соответствии с усиленным законом больших чисел для произвольного большого t : $m \rightarrow \theta_j t$ a.s., поэтому

$$\left(\frac{\theta_L}{\theta_H} \right)^m \left(\frac{1-\theta_L}{1-\theta_H} \right)^{t-m} \rightarrow \left[\left(\frac{\theta_L}{\theta_H} \right)^{\theta_j} \left(\frac{1-\theta_L}{1-\theta_H} \right)^{1-\theta_j} \right]^t. \quad (\text{A.33})$$

Нетрудно показать, что выражение в квадратных скобках (обозначим его $g(j, \theta_L, \theta_H)$) больше 1 для $j = L$ и меньше 1 для $j = H$, поэтому для любого q_0^i в первом случае $q_t^i \rightarrow 0$, а во втором — $q_t^i \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Если $j = L$, тогда для $\theta_H \in (\theta_L, 1)$:

$$\frac{\partial \log g(L, \theta_L, \theta_H)}{\partial \theta_H} = \frac{\theta_H - \theta_L}{\theta_H(1 - \theta_H)} > 0, \quad (\text{A.34})$$

²⁸Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что, накладывая условие трансверсальности (A.6), мы тем самым неявно предполагаем, что стоимость компании (дисконтированная сумма прибылей) в точке оптимума конечна (Kamihigashi 2005). Затем по аналогии с (Demers 1991, Lemma 1), можно показать, что существует верхняя граница $\bar{I}^i$ на I_t^i и верхняя граница $\bar{K}^i$ на K_t^i . Кроме того, производственная функция (2.4) не допускает отрицательных значений объемов капитала, поэтому $I_t^i \geq \min\{-(1 - \delta_i)\bar{K}^i, -(1 - \delta_i)K_{-1}^i\}$.

Если $\theta_H = \theta_L$, то $g(L, \theta_L, \theta_H) = 1$, и для любой $\theta_H > \theta_L$: $g(L, \theta_L, \theta_H) > 1$.

Если $j = H$, тогда для $\theta_H \in (\theta_L, 1)$:

$$\frac{\partial \log g(H, \theta_L, \theta_H)}{\partial \theta_H} = \log \left(\frac{\theta_L(1 - \theta_H)}{\theta_H(1 - \theta_L)} \right) < 0, \quad (\text{A.35})$$

Если $\theta_H = \theta_L$, то $g(H, \theta_L, \theta_H) = 1$, и для любой $\theta_H > \theta_L$: $g(H, \theta_L, \theta_H) < 1$.

Итак, при любых значениях $i, j \in \{p, c, d\}$, при любых q_0^i, q_0^j :

$$q_t^i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} q_t^j \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 1, & \theta = \theta_H \\ 0, & \theta = \theta_L \end{cases} \quad \text{a.s.} \quad (\text{A.36})$$

Искомый вывод тогда следует из (A.27).

А.5 Доказательство Предложения 3

Рассмотрим p_t^d как функцию только A_t : $p_t^d = p_t^d(A_t)$. Сначала покажем, что эта функция строго выпуклая. Пусть $B = (1 - \nu)(A_y)^\xi (K^d)^{\xi-1} > 0$. Тогда, опуская индекс времени t здесь и далее, из формул (A.1)-(A.3), (A.13) вытекает, что

$$p^d = BY^{1-\xi-\eta}, \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{dp^d}{dA} = B(1 - \xi - \eta)Y^{-\xi-\eta} \frac{\partial Y}{\partial A} < 0, \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{d^2 p^d}{dA^2} = B(1 - \xi - \eta)(-\xi - \eta)Y^{-1-\xi-\eta} \left(\frac{\partial Y}{\partial A} \right)^2 \quad (\text{A.39})$$

$$+ B(1 - \xi - \eta)Y^{-\xi-\eta} \frac{\partial^2 Y}{\partial A^2} > 0, \quad (\text{A.40})$$

Заметим, что $\partial Y / \partial A$ есть произведение K^c и предельного продукта AK^c (назовем его $MPAK^c$), который является положительным и убывающим (по свойствам CES-функции), и поэтому

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial A^2} = K^c \frac{\partial MPAK^c}{\partial A} = K^c \frac{\partial MPAK^c}{\partial (AK^c)} \frac{\partial (AK^c)}{\partial A} = (K^c)^2 \frac{\partial MPAK^c}{\partial (AK^c)} < 0, \quad (\text{A.41})$$

Поскольку $\xi + \eta > 1$, можно определить знаки неравенств (A.38), (A.40).

В соответствии с формулой полного математического ожидания, неравенством Йенсена и условием $\mathbb{E}[A|A^T] = \mathbb{E}[A^T|A^T]\mathbb{E}[A^C|A^T] = A^T$ (отметим, что A_{t+1}^T есть детерминированная функция m_{t+1} , $A_{t+1}^T = A_{t+1}^T(m_{t+1})$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t^i p_{t+1}^d(A_{t+1}) &= \sum_{k=0}^{t+1} \mathbb{E} [p_{t+1}^d(A_{t+1}) | A_{t+1}^T(m_{t+1} = k)] \Pr(m_{t+1} = k | q_t^i) \\
&> \sum_{k=0}^{t+1} p_{t+1}^d(\mathbb{E}[A_{t+1} | A_{t+1}^T(m_{t+1} = k)]) \Pr(m_{t+1} = k | q_t^i) \\
&= \sum_{k=0}^{t+1} p_{t+1}^d(A_{t+1}^T(m_{t+1} = k)) \Pr(m_{t+1} = k | q_t^i) \\
&= \mathbb{E}_t^i p_{t+1}^d(A_{t+1}^T).
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Остается добавить, что $\mathbb{E}_t^i p_{t+1}^d(A_{t+1}^T)$ является ожидаемой ценой «грязного» капитала в базовой модели.