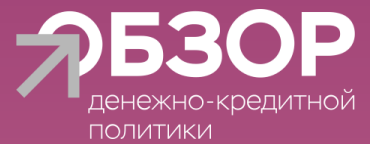




Банк России



# Оптимальный уровень цели по инфляции, ZLB и равновесная реальная процентная ставка

Исследовательский доклад

А. Глазова

Май 2023

Автор выражает признательность Ксении Юдаевой, Екатерине Резепиной, Константину Стырину, Андрею Орлову, Андрею Синякову, Андрею Полбину, а также участникам научных семинаров Банка России за полезные замечания, комментарии и предложения.

Содержание настоящего исследовательского доклада отражает личную позицию автора. Результаты исследования являются предварительными и публикуются с целью стимулировать обсуждение и получить комментарии для возможной дальнейшей доработки материала. Содержание и результаты исследования не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России или указание на официальную политику или решения регулятора. Любые ошибки в данном материале являются исключительно авторскими.

Все права защищены. Воспроизведение представленных материалов допускается только с разрешения автора.

E-mail: [GlazovaAM@mail.cbr.ru](mailto:GlazovaAM@mail.cbr.ru).

Адрес: 107016, Москва, ул. Неглинная, 12

Телефон: +7 499 300-30-00

Официальный сайт Банка России: [www.cbr.ru](http://www.cbr.ru)

© Центральный банк Российской Федерации, 2023

## Аннотация

В этой работе я исследую оптимальный уровень цели по инфляции в новокейнсианской DSGE-модели с неполной индексацией цен на ненулевую трендовую инфляцию и наличием нулевой нижней границы процентных ставок. Кроме того, я изучаю влияние реальной процентной ставки на выбор оптимального таргета по инфляции и обсуждаю издержки от перехода к новому уровню цели. В качестве критерия для определения оптимального уровня цели я использую структурную, основанную на функции полезности потребителей функцию потерь. Моя модель откалибрована для экономики России, но также может быть релевантна для других богатых природными ресурсами развивающихся стран. Я обнаруживаю, что оптимальный уровень таргета по инфляции при такой постановке задачи оказывается ниже текущего таргета Банка России 4%, и этот вывод устойчив к параметрам модели. Кроме того, я получаю устойчивую отрицательную зависимость между реальной процентной ставкой и оптимальным уровнем инфляции.

**Ключевые слова:** денежно-кредитная политика, инфляционное таргетирование, нулевая нижняя граница процентных ставок, ZLB, равновесная реальная процентная ставка, оптимальный уровень цели по инфляции, DSGE, структурные модели.

JEL-классификация: E12, E31, E52, E58, C68.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение .....	5
2. Модель.....	8
2.1. Домохозяйства .....	9
2.2. Производители конечных отечественных и импортных товаров .....	10
2.3. Производители промежуточных отечественных товаров .....	11
2.4. Производители промежуточных импортных товаров.....	12
2.5. Предложение труда.....	13
2.6. Нефтяной сектор .....	14
2.7. Базовая цена нефти.....	14
2.8. Внешний сектор .....	15
2.9. Монетарная политика и нижняя нулевая граница процентных ставок.....	15
2.10. Равновесие на рынках.....	15
3. Калибровка .....	16
3.1. Базовая калибровка .....	16
3.2. Анализ трансмиссионного механизма .....	18
3.3. Проверка соответствия модели данным .....	23
4. Оптимальный уровень цели по инфляции .....	24
4.1. Вероятность нахождения на ZLB .....	25
4.2. Критерий выбора оптимальности .....	26
4.3. Выбор оптимального уровня цели и вероятность ZLB .....	27
4.4. Оптимальная инфляция и реальная процентная ставка .....	29
4.5. Робастность при изменении параметров модели .....	30
4.6. Издержки от снижения таргета по инфляции .....	32
5. Выводы и заключение .....	35
Библиография.....	38
Приложения .....	40
I    Оптимизационные задачи.....	40
II   Функция потерь .....	43

## 1. ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия инфляционное таргетирование прекрасно зарекомендовало себя, побудив центральные банки как развитых, так и развивающихся стран переходить к этому режиму. Существует обширный набор исследований, описывающих инфляционное таргетирование в сравнении с другими режимами монетарной политики. При этом основной вопрос инфляционного таргетирования – выбор целевого показателя инфляции – далеко не так изучен.

С одной стороны, при выборе слишком высокой цели экономика несет издержки от высокой инфляции. Но установление слишком низкой цели также может быть сопряжено с рядом проблем. В последнее время многие центральные банки, таргетирующие инфляцию, столкнулись с проблемой нулевой нижней границы процентных ставок (Zero Lower Bound – ZLB). Проблема ZLB – это ситуация, когда в качестве реакции на шок (шоки) центральному банку необходимо снижать свою ключевую ставку, но оптимальная ставка находится в отрицательной области и фактически не может быть установлена. В этой ситуации центральный банк на некоторое время теряет возможность стабилизировать экономику с помощью своего основного инструмента. С этой проблемой первоначально столкнулись развитые страны, но в условиях реализовавшихся в последнее время существенных и продолжительных шоков, ведущих к спаду потребления и производства, эта тема становится также актуальной и для развивающихся стран. Хотя на данный момент российская экономика не сталкивалась с этой проблемой, возможность попадания на ZLB необходимо учитывать при выборе долгосрочной цели по инфляции.

Таким образом, выбор таргета по инфляции является ключевым вопросом инфляционного таргетирования и осуществляется с учетом компромисса между опасностью столкнуться с проблемой ZLB (и потерь от невозможности стабилизировать экономику) и издержек экономических агентов от высокой инфляции.

В ходе исследования я искала ответы на несколько вопросов для экономики России. Какова вероятность столкнуться с проблемой ZLB в зависимости от таргетируемой инфляции? Как соотносятся вероятность нахождения на ZLB и вероятность нахождения в отрицательной области процентных ставок<sup>1</sup>? Каков оптимальный уровень цели по инфляции в терминах благосостояния потребителей? Как этот оптимальный уровень зависит от реальной нейтральной процентной ставки? Каковы потери выпуска при переходе к новому уровню цели?

Я отвечаю на поставленные вопросы на основании построенной DSGE-модели. Моя DSGE-модель является новокейнсианской по своей природе и по сравнению со стандартными моделями такого типа (Smets and Wouters, 2003, 2007, Christiano и др., 2005) включает несколько особенностей, важных для понимания функционирования механизма ZLB, выбора оптимальной цели по инфляции, а также релевантности результатов для российской экономики.

Во-первых, как показано в аналитической записке Банка России (2017), большинство фирм в России предпочитают менять цены не постоянно, а один раз в определенный период. Кроме того, помимо инфляции, фирмы ориентируются на издержки производства, структуру контрактов и другие факторы. Таким образом, часть цен в экономике не меняется или меняется частично на протяжении некоторого времени. В терминах моделирования это означает, что существуют жесткость цен и неполная индексация. Наличие неполной индексации цен производителей создает искажения в относительных ценах, то есть создает издержки от высокой инфляции.

Во-вторых, наличие нулевой нижней границы процентных ставок является естественным ограничением инфляционного таргетирования. Хотя развивающиеся страны не часто сталкивались

---

<sup>1</sup> Здесь и далее, говоря о вероятности нахождения на ZLB, я имею в виду вероятность, рассчитанную по модели, включающей ограничение на ZLB, а говоря о вероятности нахождения в отрицательной области процентных ставок, подразумеваю вероятность по модели, не включающей такого ограничения.

с этой проблемой, например, опыт Чили 2008–2010 гг. является примером существования этой проблемы на практике (Céspedes и др., 2014).

Вместе два этих механизма создают компромисс между потерями от высокой инфляции (при выборе слишком высокого таргета) и потерями от ZLB (при выборе слишком низкой цели по инфляции, что увеличивает вероятность ZLB).

Учет особенностей экономики России обеспечивается за счет включения нефтяного сектора и калибровки параметров.

Академическая литература, описывающая проблему выбора оптимального уровня цели по инфляции при наличии нулевой нижней границы с помощью подхода общего равновесия, весьма ограничена. Для экономики США такие DSGE-модели построены, например, у Andrade и др. (2019) и Coibion и др. (2012). Однако это модели закрытой экономики. Таким образом, ключевым отличием моей работы от существующих является учет взаимосвязей отечественной экономики с внешним сектором при выборе цели по инфляции.

В ряде работ исследуются вероятности нахождения на ZLB для экономики США, например, в Chung и др. (2012). В работах Kiley and Roberts (2017) и Bernanke и др. (2019) показывается, что выбор более высокого таргета по инфляции снижает вероятность нахождения на ZLB. Насколько мне известно, не существует исследований, изучающих выбор оптимальной цели по инфляции с учетом наличия ZLB для российской экономики или других развивающихся стран. Для экономики России тема нулевой нижней границы затронута в работе Андреев и Полбин (2021), в которой рассчитываются вероятности ZLB. Авторы получают, что вероятность ZLB в оптимуме находится в диапазоне 6,0–20,1%. В качестве критерия оптимальности используется полуструктурное правило, предполагающее минимизацию дисперсий инфляции, ключевой ставки и выпуска. Для текущего таргета 4% авторы получают вероятность ZLB, равную 0,3%, что ниже, чем получаю я в своих расчетах. Это, вероятно, связано с тем, что авторы включают в работу только два шока, в то время как моя модель включает 14 шоков.

В своем исследовании я нахожу отрицательную зависимость между выбираемой целью по инфляции и вероятностью нахождения на ZLB. Так, при таргетируемой инфляции 4% вероятность ZLB равняется примерно 1%, а при таргете 0,5% – около 17%. При этом при отсутствии в модели ZLB эта вероятность несколько снижется для каждого аналогичного уровня цели. Это связано с тем, что в ситуации, когда центральный банк не может опускать ставку ниже нуля, ему требуется больше времени для стабилизации экономики, чем в ситуации, когда такого ограничения нет.

Чтобы говорить об оптимальности, прежде всего необходимо определиться с тем, что понимается под этим термином. В литературе по оптимальной цели по инфляции часто предполагают, что оптимальным будет тот уровень, который минимизирует квадраты отклонений инфляции и выпуска от их естественных уровней à la Woodford (2003), то есть решается задача вида:  $\psi^{PI} * \hat{\pi}_t^2 + \psi^Y \hat{y}_t^2 \rightarrow \min$ . При этом в неструктурных и полуструктурных моделях параметры  $\psi^{PI}$  и  $\psi^Y$  обычно калибруются или оцениваются, то есть в целом функция потерь не является микрообоснованной. Для структурных моделей закрытой экономики с полной индексацией цен<sup>2</sup> функция такого вида может быть выведена из функции полезности потребителей. В этом случае перед разрывом инфляции и разрывом выпуска уже будут получены структурные коэффициенты. При добавлении в модель неполной индексации функция потерь будет принимать более сложную форму (см., например, Andrade и др.; 2019, Coibion и др., 2012). При расширении же модели до открытой экономики это соотношение примет еще более сложную форму, прежде всего потому, что предпосылка о том, что потребление равно выпуску, больше не выполняется. Вывод функции потерь для такой постановки модели приводится в данной работе.

<sup>2</sup> Неполная индексация означает, что часть фирм не могут полностью скорректировать цены на инфляцию предыдущего периода или на равновесный уровень инфляции.

На основании построенной базовой модели и описанной выше функции потерь я получаю, что оптимальным для российской экономики является таргет по инфляции 1,1%. Этот уровень цели соответствует вероятности нахождения на ZLB 11%.

Важным вопросом при выборе оптимального уровня цели по инфляции также является понимание величины реальной нейтральной процентной ставки. Учитывая, что номинальная процентная ставка представляет собой сумму реальной ставки и инфляции, чем выше реальная ставка, тем *ceteris paribus* более низкий таргет по инфляции может быть выбран без изменения вероятности нахождения на ZLB. Между тем выбор калибруемого уровня реальной нейтральной процентной ставки для модели не является очевидным, так как это величина ненаблюдаемая.

Согласно существующим работам, реальная процентная ставка для российской экономики, видимо, находится в интервале от 1 до 3%. Например, Крепцев и др. (2016) – 1–3,2%, IMF (2019) – 1–3%, Isakov and Latypov (2019) – 1,5–2,5%. В Докладе о денежно-кредитной политике Банка России (октябрь 2022 г.) говорится о диапазоне 1–2% для долгосрочной реальной нейтральной процентной ставки. При этом в Докладе о денежно-кредитной политике Банка России (май 2022 г.) отмечалось, что в ближайшее время Центральный банк Российской Федерации ожидает повышения реальной ставки из-за неопределенности в экономике. Я калибрую равновесную ставку исходя из фундаментальных факторов и устанавливаю ее на уровне 1,78% годовых.

Насколько мне известно, единственной работой, в которой явно исследуется зависимость реальной ставки и оптимального уровня таргета, является Andrade и др. (2019). Авторы показывают, что снижение реальной ставки на 1 п.п. должно компенсироваться увеличением цели по инфляции приблизительно на ту же величину. В работе Coibion и др. (2012) изучается выбор оптимальной инфляции при условии наличия ZLB, однако предполагается, что реальная ставка процента неизменна.

В своей работе я привожу рассчитанную по модели оптимальную цель по инфляции для разных уровней реальной ставки. Я получаю, что, во-первых, как и предсказывает теория, более высокая реальная ставка соответствует более низкой оптимальной цели по инфляции, причем снижение реальной ставки на 1 п.п. требует увеличения таргета по инфляции примерно на 0,5 п.п.; во-вторых, для каждого уровня таргета вероятность ZLB тем ниже, чем выше реальная процентная ставка.

При переходе к новому таргету по инфляции важным вопросом также является стратегия такого перехода, его длительность и размер потерь выпуска. Существует ряд работ, в которых показывается, что переход к более низкой инфляции сопровождается падением выпуска, например Ball (1994b), Cecchetti and Rich (2001), Gordon and King (1982).

Индикатором, который обычно используется в литературе для измерения негативного влияния на выпуск от дезинфляции, является коэффициент потерь (Sacrifice Ratio – SR) (например, Ascari and Ropele, 2012). Этот коэффициент представляет собой кумулятивные процентные потери разрыва выпуска (разницы между текущим значением выпуска и его трендом), деленные на разницу между старым и новым целевыми уровнями инфляции, взятыми с отрицательным знаком. Таким образом, коэффициент показывает потери выпуска относительно величины изменения таргета. Этот показатель зависит от количества периодов, за которое экономика переходит к новому равновесию, величины изменения цели, а также силы трансмиссионного механизма. Согласно эмпирическим исследованиям (например, Gordon and King, 1982; Cecchetti and Rich, 2001; Durand и др., 2008), этот коэффициент лежит в диапазоне от 0,5 до 3.

Ascari and Ropele (2012) изучают эффект на выпуск от перманентного снижения инфляции на основании среднemasштабной новокейнсианской модели типа Smets and Wouters (2003, 2007), Christiano и др. (2005). Авторы получают значение коэффициента от 0,95 до 1,13 в зависимости от текущего и нового таргета (исследуется три варианта снижения цели по инфляции – с 4 до 2%, с 6 до 2%, с 8 до 2%) и параметра жесткости политики центрального банка (1,5 и 3).

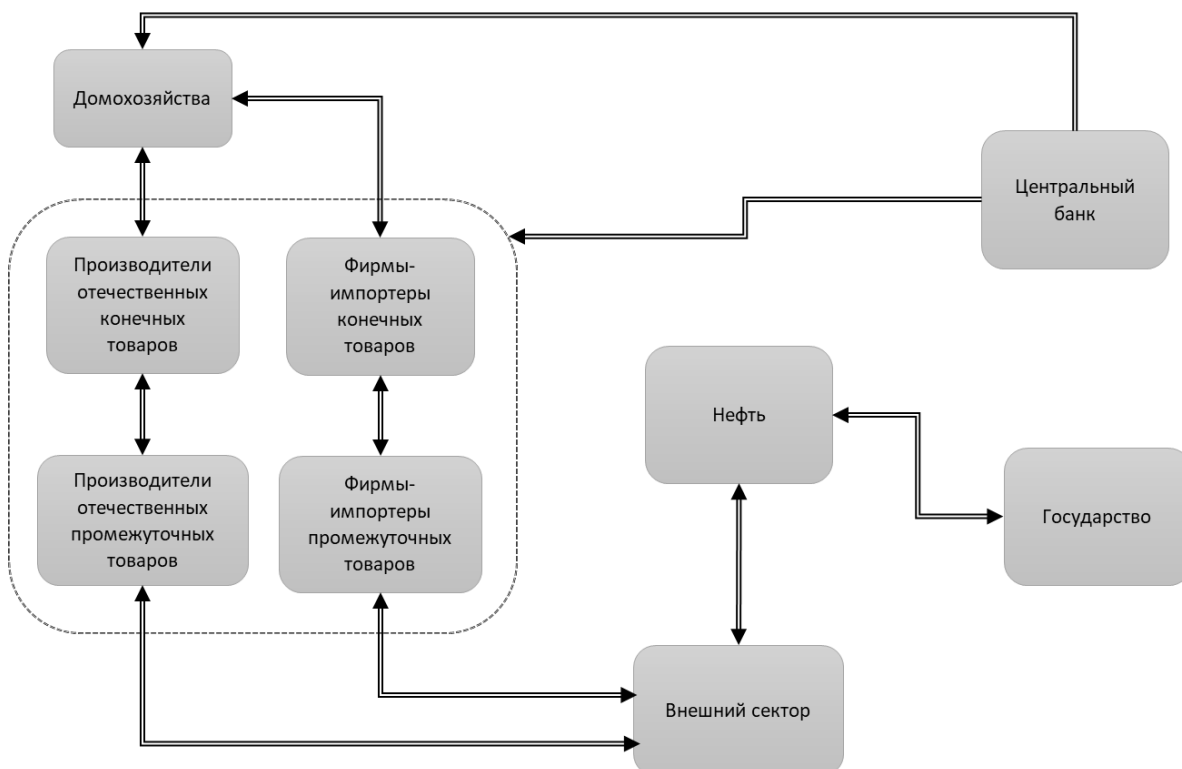
В моей работе я нахожу, что коэффициент SR равен 1,03. Таким образом, для России этот коэффициент находится ближе к нижней границе обсуждаемого в Ascari and Ropele (2012) диапазона  $[0,5; 3]$ , в котором лежит этот коэффициент для других работ. Это может объясняться структурой экономики России. Интервал представлен на основании расчетов по странам Европы и США. Тот факт, что я получаю достаточно низкий коэффициент, свидетельствует в пользу того, что снижение цели по инфляции сопряжено с меньшими издержками, чем в среднем для других стран.

Далее работа организована следующим образом. Во второй части приводится описание модели. В третьей обсуждается калибровка модели, ее свойства и соответствие модели данным. В четвертой части работы описывается теоретическая основа выбора оптимальной цели по инфляции и приводятся полученные оценки. Пятая часть включает выводы и заключение.

## 2. Модель

Моя DSGE-модель похожа на Smets and Wouters (2003, 2007). Я также опираюсь на модель Medina and Soto (2007), в которой учитываются особенности сырьевой экономики. Моя модель – это DSGE-модель среднего масштаба для малой открытой экономики, откалиброванная для экономики России. Помимо стандартных для DSGE-моделей секторов домохозяйств, фирм и государства, эта модель включает сектор природных ресурсов (нефти). При этом для упрощения структуры модели и облегчения интерпретации результатов из модели был исключен капитал. По своей природе эта модель является новокейнсианской и включает в себя номинальные жесткости. Кроме того, важной особенностью моей модели является неполная индексация цен, обеспечивающая наличие искажения в относительных ценах (то есть издержек от высокой инфляции), и нулевая нижняя граница процентной ставки. Структура модели представлена на рисунке 2.1.

Рисунок 2.1. Схема модели





## 2.1. ДОМОХОЗЯЙСТВА

Потребительский сектор моделируется как континуум домохозяйств  $h \in [0; 1]$ . Домохозяйства покупают потребительские товары, предоставляя рабочую силу фирмам. Каждое домохозяйство предлагает определенный вид трудовых услуг производителям промежуточной продукции. Домохозяйства живут бесконечно и максимизируют свою функцию полезности вида:

$$\mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left( e^{\zeta_{t+s}^c} \log(C_{t+s} - \eta C_{t+s-1}) - \frac{1}{1 + \sigma^L} \int_0^1 L_{t+s}(h)^{1+\sigma^L} dh \right),$$

где полезность положительно зависит от потребления  $C_t$  и отрицательно от количества отработанных часов  $L_t(h)$ . Параметр  $\eta$  характеризует привычки в потреблении. Параметр  $\sigma^L$  представляет собой обратную эластичность предложения труда по Фришу.  $\zeta_{t+s}^c$  – шок предпочтений, представляющий собой процесс авторегрессии первого порядка:

$$\zeta_t^c = \rho_c \zeta_{t-1}^c + \zeta_t^c,$$

где инновация  $\zeta_t^c \sim i.i.d$  со средним ноль.

Домохозяйства потребляют композитный товар, в котором доля  $v_c$  – отечественные товары и  $(1 - v_c)$  – иностранные товары:

$$C_t = \left( v_c \frac{1}{\eta^c} * (C_t^H)^{\frac{\eta^c-1}{\eta^c}} + (1 - v_c) \frac{1}{\eta^c} * (C_t^F)^{\frac{\eta^c-1}{\eta^c}} \right)^{\frac{\eta^c}{\eta^c-1}},$$

где  $C_t^H$  – потребление отечественных товаров,  $C_t^F$  – потребление иностранных товаров,  $\eta^c$  – эластичность между отечественными и иностранными товарами.

Я предполагаю наличие двух видов домохозяйств – нериккардианских (составляющих долю  $\lambda$  от всех домохозяйств) и риккардианских (составляющих долю  $(1 - \lambda)$ ), различающихся доступом к финансовым активам.

Риккардианские домохозяйства могут покупать однопериодные облигации  $B_t$  с выплатой в следующем периоде в рублях по ставке  $i_t$  и в иностранной валюте  $B_t^F$  по ставке  $i_t^{rrF}$ . Кроме того, они получают дивиденды  $D_t$ , выплачиваемые фирмами-монополистами. Таким образом, они максимизируют свою полезность с учетом следующего бюджетного ограничения:

$$P_t C_t + \frac{1}{i_t} B_t + \frac{1}{i_t^{rrF}} \varepsilon_t B_t^F \leq \int_0^1 W_t(h) L_t(h) dh + B_{t-1} + \varepsilon_t B_{t-1}^F + D_t,$$

где  $P_t$  – уровень цен в экономике,  $W_t(h)$  – номинальная заработная плата домохозяйства типа  $h$ .

Ставка по облигациям в валюте  $i_t^{rrF}$  является рискованной и зависит от безрисковой ставки  $i_t^F$  и премии за риск  $\theta$ :

$$i_t^{rrF} = i_t^F * \theta_t,$$

где  $\theta_t$  – премия за риск, определяемая как:

$$\theta = \left( \frac{B_t^F}{P_t^Y Y_t} \right)^{\rho^{AY}} * \left( \frac{P_t^{OIL}}{P_t^Y} \right)^{\rho^{OIL}},$$

где  $\rho^{AY}$  – эластичность премии за риск по отношению чистой позиции по иностранным активам к выпуску,  $\rho^{oil}$  – эластичность премии за риск по цене на нефть.

Таким образом, в результате решения оптимизационной задачи получаются следующие соотношения:

$$\frac{e^{\xi_{c,t}}}{C_t - \eta C_{t-1}} - \beta \eta \frac{e^{\xi_{c,t+1}}}{C_{t+1} - \eta C_t} = \Lambda_t \quad \leftarrow \text{уравнение для множителя Лагранжа}$$

$$\Lambda_t = \beta \frac{\Lambda_{t+1}}{\Pi_{t+1}} i_t \quad \leftarrow \text{уравнение Эйлера}$$

$$\text{где } \Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

$$i_t = i_t^F \theta_t \frac{\mathcal{E}_{t+1}}{\mathcal{E}_t} \quad \leftarrow \text{паритет процентных ставок (uncovered interest rate parity – UIP)}$$

Нерикарданские домохозяйства тратят весь свой трудовой доход на потребление. Кроме того, они получают нефтяные доходы (выплачиваемые государством в качестве трансфертов), которые также тратятся на потребление:

$$P_t C_t \leq \int_0^1 W_t(h) L_t(h) dh + \chi * P_t^{oilRef} O_t,$$

где  $\chi$  – государственная доля в нефтяных доходах,  $P_t^{oilRef}$  – базовая цена нефти,  $O_t$  – физический объем нефти.

## 2.2. ПРОИЗВОДИТЕЛИ КОНЕЧНЫХ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ И ИМПОРТНЫХ ТОВАРОВ

Конечные товары производятся в условиях совершенной конкуренции из промежуточных. Производственная функция представляет собой функцию Диксита – Стиглица:

$$Y_t^i = \left( \int_0^1 Y_t^i(f)^{\frac{\epsilon_i - 1}{\epsilon_i}} df \right)^{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_i - 1}}, \quad (2.2.1)$$

где  $Y_t^i$  – выпуск производителей конечных товаров,  $Y_t^i(f)$  – выпуск  $f$ -го производителя промежуточных товаров,  $\epsilon_i$  – эластичность субститутов между двумя промежуточными товарами и  $i \in \{HD, F, HF\}$ ,  $HD$  – отечественные товары, продаваемые внутри страны,  $F$  – иностранные товары, продаваемые внутри страны,  $HF$  – отечественные товары, продаваемые за рубежом.

Цены отдельных фирм  $Y_t^i(f)$  агрегируются в общий индекс цен с помощью функции Диксита – Стиглица:

$$P_t^i = \left( \int_0^1 P_t^i(f)^{\epsilon_i - 1} df \right)^{\frac{1}{\epsilon_i - 1}}. \quad (2.2.2)$$

Репрезентативная фирма максимизирует прибыль вида:

$$P_t^i Y_t^i - \int_0^1 P_t^i(f) Y_t^i(f) = P_t^i \left( \int_0^1 Y_t^i(f)^{\frac{\epsilon_i-1}{\epsilon_i}} df \right)^{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_i-1}} - \int_0^1 P_t^i(f) Y_t^i(f),$$

где  $P_t^i$  – цена конечной продукции,  $P_t^i(f)$  – цена промежуточного товара  $f$ -ого производителя.

Из условия равенства прибыли нулю получаем спрос на промежуточную продукцию:

$$Y_t^i(f) = \left( \frac{P_t^i}{P_t^i(f)} \right)^{-\epsilon_i} Y_t^i. \quad (2.2.3)$$

### 2.3. ПРОИЗВОДИТЕЛИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ ТОВАРОВ

Промежуточные товары производятся фирмами в условиях монополистической конкуренции в соответствии с производственной функцией:

$$Y_t^{HD}(f) = Z_t L_t(f),$$

где  $Z_t$  – стохастический тренд производительности и

$$Z_t = Z_{t-1} e^{\zeta_t^Z}.$$

При этом часть товаров продается в качестве сырья производителям конечной отечественной продукции, а часть продается в качестве несырьевого экспорта.

Промежуточные товары производятся с номинальными ценовыми жесткостями à la Кальво. Это означает, что фирмы с вероятностью  $\phi^i$  сталкиваются с невозможностью оптимизировать цены,  $i \in \{HD, HF\}$ ,  $HD$  – отечественные товары, продаваемые внутри страны,  $HF$  – отечественные товары, продаваемые за границу.

Если фирма не может оптимизировать свою цену в периоде  $t$ , то она устанавливает ее в соответствии со следующим правилом:

$$P_t^i(f) = (\Pi_{t-1}^i)^{\gamma_i} P_{t-1}^i(f),$$

$$\text{где } i \in \{HD, HF\}, \Pi_t^i \equiv \frac{P_t^i}{P_{t-1}^i},$$

$\Pi^i$  – равновесное значение инфляции,  $\gamma_i$  – параметр индексации цен и  $0 \leq \gamma_i < 1$ .

Существенным в контексте выбора оптимальной цели по инфляции является существование в модели неполной индексации, то есть то, что коэффициент  $\gamma_i$  калибруется строго меньше единицы. Неполная индексация означает, что часть фирм не могут полностью скорректировать цены с предыдущего периода на прошлую или равновесную инфляцию. Механизм неполной индексации позволяет моделировать взаимосвязь между дисперсией цен и трендовой инфляцией и приводит к возникновению издержек от высокой инфляции.

Если фирма может пересмотреть свою цену на отечественные товары, продаваемые внутри страны в период  $t$ , то она выбирает ее исходя из условия максимизации прибыли:

$$\mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HD}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HD} P_t^{HD*}(f)}{P_{t+s}} Y_{t,t+s}^{HD} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \frac{Y_{t,t+s}^{HD}}{Z_{t,t+s}} \right),$$

где  $\Lambda_t$  – предельная полезность потребителей и  $Y_{t,t+s}^i(f)$  – спрос на продукцию монополиста, зафиксировавшего цену в период  $t$ , в период  $t+s$ , который имеет вид:

$$Y_{t,t+s}^i(f) = \left( \frac{V_{t,t+s}^i P_t^{i*}}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon_i} Y_{t+s}^i,$$

где  $V_t^i$  – кумулятивный эффект индексации цен на инфляцию предыдущих периодов:

$$V_{t,t+s}^i = \prod_{j=t}^{t+s-1} (\Pi_j)^{Y_j^i}.$$

Наличие  $\Lambda_t$  в задаче фирмы связано с тем, что монополистические фирмы принадлежат потребителям, и потребители получают зарабатываемую ими прибыль в качестве дивидендов.

Условие первого порядка для этой задачи имеет вид<sup>3</sup>:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HD}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{(V_{t,t+s}^{HD} P_t^{HD*}(f))^{1-\epsilon^{HD}}}{P_{t+s}} \left( \frac{1}{P_{t+s}^{HD}} \right)^{-\epsilon^{HD}} Y_{t+s}^{HD} - \frac{\epsilon^{HD}}{\epsilon^{HD}-1} \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HD} P_t^{HD*}(f)}{P_{t+s}^{HD}} \right)^{-\epsilon^{HD}} \frac{Y_{t+s}^{HD}}{Z_{t+s}} \right) = 0.$$

Аналогично выбирается цена для отечественных товаров, продаваемых за границей:

$$\mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HF}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HF} P_t^{HF*}(f)}{P_{t+s}} Y_{t+s}^{HF} - \frac{1}{\epsilon_{t+s}} \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \frac{Y_{t+s}^{HF}}{Z_{t+s}} \right).$$

Условие первого порядка для этой задачи имеет вид:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HF}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{(V_{t,t+s}^{HF} P_t^{HF*}(f))^{1-\epsilon^{HF}}}{P_{t+s}} \left( \frac{1}{P_{t+s}^{HF}} \right)^{-\epsilon^{HF}} Y_{t+s}^{HF} - \frac{\epsilon^{HF}}{\epsilon^{HF}-1} \frac{1}{\epsilon_{t+s}} \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HF} P_t^{HF*}(f)}{P_{t+s}^{HF}} \right)^{-\epsilon^{HF}} \frac{Y_{t+s}^{HF}}{Z_{t+s}} \right) = 0.$$

## 2.4. ПРОИЗВОДИТЕЛИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ИМПОРТНЫХ ТОВАРОВ

Промежуточные товары производятся фирмами в условиях монополистической конкуренции из иностранных товаров.

Так же как и отечественные, иностранные товары производятся с номинальными ценовыми жесткостями à la Кальво. Это означает, что фирмы с вероятностью  $\phi^F$  сталкиваются с невозможностью изменить цены.

Если фирма может пересмотреть свою цену на отечественные товары, продаваемые внутри страны в период  $t$ , то она выбирает ее исходя из условия максимизации прибыли:

$$\mathbb{E} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^F) \Lambda_{t+s} \left( \frac{V_{t,t+s}^F P_t^{F*}}{P_{t+s}} Y_{t,t+s}^F - \epsilon_{t+s} \frac{P_t^{For}}{P_{t+s}} \frac{Y_{t,t+s}^F}{Z_{t,t+s}} \right),$$

где  $P_t^{For}$  – цена на промежуточные товары за границей,  $P_t^{F*}$  – оптимальная цена импортеров.

<sup>3</sup> Полный вывод уравнений модели содержится в Приложении I.

Если фирма не может оптимизировать свою цену в периоде  $t$ , то она устанавливает ее в соответствии со следующим правилом:

$$P_t^F(f) = (\Pi_{t-1}^F)^{\gamma_F} P_{t-1}^F(f),$$

$$\Pi_t^F \equiv \frac{P_t^F}{P_{t-1}^F}, \Pi^F - \text{равновесное значение, } 0 \leq \gamma_F < 1.$$

Так же как и в случае с производителями отечественных товаров, у импортеров индексация цен является неполной.

Условие первого порядка для этой задачи имеет вид:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^F) \Lambda_{t+s} \left( \frac{(V_{t,T}^F P_{t+s}^{F*}(f))^{1-\epsilon^F}}{P_{t+s}} \left( \frac{1}{P_{t+s}^F} \right)^{-\epsilon^F} Y_{t+s}^F - \frac{\epsilon^F}{\epsilon^F - 1} \mathcal{E}_{t+s} \frac{P_t^{For}}{P_{t+s}} \left( \frac{V_{t,t+s}^F P_{t+s}^{F*}(f)}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon^F} \frac{Y_{t+s}^F}{Z_{t+s}} \right) = 0.$$

## 2.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ТРУДА

Каждое домохозяйство  $h$  предлагает свой специфический вид труда  $N_t(h)$ . Труд отдельных домохозяйств агрегирует в совокупное предложение труда  $N_t$  с помощью CES-функции:

$$N_t = \left( \int_0^1 N_t(h) \frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} dh \right)^{\epsilon_L / (\epsilon_L - 1)}, \quad (2.5.1)$$

где  $\epsilon_L$  – эластичность между типами труда разных фирм.

$$N_t = \int_0^1 L_t(f) df, \quad (2.5.2)$$

где  $L_t(f)$  – спрос на труд фирмы  $f$ ,  $L_t$  – совокупный спрос на труд в экономике, агрегированный по фирмам,  $N_t(h)$  – предложение труда домохозяйства  $h$ ,  $N_t$  – агрегированное по всем домохозяйствам предложение труда.

$$W_t = \left( \int_0^1 W_t(h)^{1-\epsilon_L} dh \right)^{1/(1-\epsilon_L)}, \quad (2.5.3)$$

где  $W_t$  – номинальная совокупная заработная плата,  $W_t(h)$  – заработная плата, выплачиваемая домохозяйству типа  $h$ .

Я предполагаю наличие номинальной жесткости à la Кальво в зарплатах, то есть с вероятностью  $\phi^L$  домохозяйства не могут оптимизировать зарплату. В этом случае зарплата устанавливается согласно следующему правилу индексации:

$$W_t(h) = (\Pi_{t-1}^L)^{\gamma_L} W_{t-1}(h),$$

где  $\Pi_t^L \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}$ ,  $\Pi$  – равновесное значение инфляции, а параметр индексации  $\gamma_L$  лежит в диапазоне  $0 \leq \gamma_L < 1$ , то есть индексация является неполной.

В случае когда домохозяйства могут выбрать зарплату, она находится из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\mathbb{E} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^L) \Lambda_{t+s} \left( \frac{V_{t,t+s}^L W_t^*}{W_{t+s}} L_{t,t+s} - \frac{1}{\nu} L_{t,t+s}^{1+\nu} \right),$$

где функция спроса на труд в период  $t + s$  для домохозяйства, изменившего цену в период  $t$ , равна:

$$N_{t,t+s} = \left( \frac{V_{t,t+s}^L W_t^*}{W_{t+s}} \right)^{-\epsilon_L} N_{t+s},$$

где кумулятивный эффект на зарплату от индексации:

$$V_{t,t+s}^L = \prod_{j=t}^{t+s-1} (\Pi_j)^{\gamma_L}.$$

## 2.6. НЕФТЯНОЙ СЕКТОР

Предполагается, что нефтяная фирма производит гомогенный сырьевой товар и весь он экспортируется. Производство нефти  $O_t$  зависит от производства в предыдущий период и иностранного спроса  $Y_t^F$ :

$$O_t = (O_{t-1})^{\rho^O} * (Y_t^F)^{\alpha^O},$$

где  $\alpha^O$  – эластичность производства нефти по иностранному спросу.

Цена нефти определяется экзогенно:

$$\widehat{pr}O_t = \rho^{prO} \widehat{pr}O_{t-1} + \zeta_t^{prO}.$$

Государство получает долю  $\chi$  от продажи нефти и выплачивает ее домохозяйствам в качестве трансфертов.

## 2.7. БАЗОВАЯ ЦЕНА НЕФТИ

Бюджетное правило представляет собой механизм снижения волатильности доходов страны. Этот инструмент политики часто применяется в странах, у которых природные ресурсы составляют существенную часть экспорта. Смысл этого механизма состоит в установлении долгосрочной (базовой) цены на экспортируемый ресурс. Если фактическая цена оказывается выше базовой – то излишек перечисляется в специальный фонд для хранения. Если фактическая цена оказывается ниже базовой – то государственный бюджет использует фонд для финансирования недостающей части запланированных расходов. Таким образом, более стабильные государственные расходы сопоставляются с более волатильными государственными сырьевыми доходами.

В России бюджетное правило первоначально было введено в 2004 г. и с тех пор несколько раз пересматривалось, например, в 2008 г., когда Стабилизационный фонд Российской Федерации был разделен на Резервный фонд и Фонд национального благосостояния, или в 2008 году, когда правило менялось в связи с мировым финансовым кризисом. Кроме того, действие правила приостанавливалась для возможности более гибко реагировать на ситуацию в 2015, 2020 и 2022 годах. На момент написания данной работы принят закон об изменении бюджетного правила с 2023 года. Новое бюджетное правило предлагает понимать под базовыми нефтегазовыми доходами 8 трлн. рублей, а доходы выше этого значения считать сверхдоходами.

Учитывая, что на момент написания работы новое бюджетное правило еще не вступило в силу, сложно оценить его возможное влияние на экономику и оптимальный уровень ключевой ставки как основного вопроса моего исследования. Однако для того чтобы проиллюстрировать, что бюджетное правило оказывает эффект на выбор оптимального уровня цели (в результате того, что нивелирует часть шоков, воздействующих на экономику), я рассматриваю два варианта модели – без бюджетного правила и с бюджетным правилом. При этом в качестве бюджетного правила рассматривается механизм, связанный с ценой отсечения, который использовался в России с 2017 по 2022 год.

Для простоты в модели в явном виде не описывается резервный фонд. Предполагается, что каждый период государство сберегает/занимает разницу между базовыми и фактическими нефтяными доходами в иностранной валюте  $\chi * (P_t^{Oil} - P_t^{OilRef})O_t$ . В такой постановке задачи неявно предполагается, что фонд является неисчерпаемым. Базовые нефтяные доходы  $\chi * P_t^{OilRef}O_t$  выплачиваются нерикарданским домохозяйствам в качестве дивидендов.

## 2.8. ВНЕШНИЙ СЕКТОР

Внешний сектор моделируется экзогенно по отношению к отечественной экономике. Иностранная ставка процента  $\hat{i}_t^F$  и иностранная инфляция  $\hat{\pi}_t^F$  соответственно равны:

$$\hat{i}_t^F = \rho^{iF} \hat{i}_{t-1}^F + \varepsilon_t^{iF} \sim AR(1),$$

$$\hat{\pi}_t^F = \rho^{piF} \hat{\pi}_{t-1}^F + \varepsilon_t^{piF} \sim AR(1).$$

## 2.9. МОНЕТАРНАЯ ПОЛИТИКА И НИЖНЯЯ НУЛЕВАЯ ГРАНИЦА ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Правило политики центрального банка имеет вид:

$$i_t^{ZLB} - \bar{i}_t = \psi_R (i_{t-1}^{ZLB} - \bar{i}_{t-1}) + (1 - \psi_R) \psi_{PI} * \hat{\pi}_{t+1} + \zeta_t^{MP},$$

$$i_t^{ZLB} = \begin{cases} i_t^{ZLB}, & \text{если } i_t^{ZLB} \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

где  $i_t^{ZLB} \equiv \log(i_t^{ZLB})$  и  $\bar{i}_t$  – тренд процентной ставки,  $\zeta_t^{MP}$  – шок монетарной политики,  $\psi_R$  – коэффициент сглаживания реакции монетарной политики,  $\psi_{PI}$  – коэффициент реакции монетарной политики на отклонение инфляции от целевого уровня.

## 2.10. РАВНОВЕСИЕ НА РЫНКАХ

Равновесие в экономике определяется следующими соотношениями.

Спрос на товары производителей промежуточной продукции равен совокупному предложению этих товаров:

$$Y_t^H(f) = \left(\frac{P_t^H(f)}{P_t^H}\right)^{-\epsilon_H} Y_t^H + \left(\frac{P_t^{HF}(f)}{P_t^{HF}}\right)^{-\epsilon_{HF}} Y_t^{HF}.$$

Спрос на отечественные товары равен их предложению:

$$Y_t^H = C_t^H + \left(1 - \frac{\theta}{\chi}\right) Y_t^{HF}.$$

Выпуск представляет собой расходы на потребление домохозяйств –  $C_t$ , экспорт нефтяной и ненефтяной –  $X_t$ , – импорт  $M_t$ :

$$Y_t = C_t + X_t - M_t.$$

Платежный баланс имеет вид:

$$\frac{\varepsilon_t B_t^F}{(1 + i_t^F)} = \varepsilon_{t-1} B_{t-1}^F - (1 - \chi) * P_t^{oil} O_t - \chi * (P_t^{oil} - P_t^{oilRef}) O_t + P_t^X X_t - P_t^M M_t,$$

где  $P_t^{oilRef}$  – базовая цена на нефть.

В модели с бюджетным правилом влияние на курс происходит через платежный баланс. В модели с правилом  $P_t^{oil} \neq P_t^{oilRef}$ , поэтому часть влияния цены нефти на курс нивелируется. При этом в модели без правила  $P_t^{oil} = P_t^{oilRef}$ , следовательно, дополнительный элемент, связанный с базовой ценой на нефть, в платежном балансе обнуляется, и такого эффекта не происходит.

### 3. КАЛИБРОВКА

В этом разделе я обсуждаю используемую в работе калибровку параметров. Для калибровки параметров я использую российские и зарубежные эмпирические работы, а также непосредственно статистические данные по России. Было принято решение не оценивать модель с помощью байесовского оценивания по нескольким причинам. Во-первых, возможность адекватно оценить микропараметры, такие как степени ценовой жесткости или степень индексации цен, для отдельных типов фирм с помощью агрегированных рядов данных вызывает сомнения. Во-вторых, во многих работах, использующих байесовское оценивание параметров, выбор априорных значений и стандартных отклонений подробно не описывается, что, по сути, делает различия между оценкой и калибровкой размытыми. В связи с этим я предпочитаю использовать калибровку, при этом производя проверку робастности оценок в соответствующем разделе.

#### 3.1. БАЗОВАЯ КАЛИБРОВКА

Базовая калибровка параметров приводится в таблице 3.1.

Темп роста ВВП предполагается равным 1,5% в год (то есть  $1,015^{0.25}$  в квартал,  $\bar{g}_y = 1,015^{0.25}$ ). Консенсус среднесрочной оценки потенциального роста ВВП России оценивается в 1,5–2%. Например, IMF (2021) – 1,6%, World Bank (2021) – 1,8%.

Значение фактора дисконтирования  $\beta$  устанавливается на уровне 0,999, что соответствует реальной процентной ставке 1,78% годовых. Как обсуждалось выше, согласно эмпирическим исследованиям, реальная ставка для России лежит в диапазоне от 1 до 3%.

Я калибрую эластичность замещения между отечественными и импортными товарами на уровне 0,9. Это значение близко к единице, так как доля импорта в ВВП для России является устойчивой и практически не меняется на протяжении последних двух десятилетий и составляет около 20%.



Я калибрую долю импорта в потреблении на уровне 0,43. Я определяю этот показатель как отношение долей импорта к ВВП и потребления к ВВП, ориентируясь на данные Росстата о компонентах ВВП с 2014 по 2020 год.

Степень снижения полезности потребителя от дополнительной единицы труда (обратная эластичности по Фришу)  $\nu$  показывает, какая дополнительная компенсация требуется работникам для того, чтобы они хотели предоставлять дополнительную малую единицу труда, и чем выше этот показатель, тем более высокая компенсация требуется. Я устанавливаю этот коэффициент равным 1,04.

Оценки эластичности замещения между промежуточными товарами – субститутами, как обсуждается в Leif и др. (2005), для США, еврозоны и Великобритании лежат в интервале от 3 до 11. При этом чем выше это значение, тем ближе рынок к совершенной конкуренции. Я устанавливаю для отечественных товаров, продаваемых дома  $\theta^{HD}$ , на уровне 6, для отечественных товаров, продаваемых за границей  $\theta^{HF}$  – 6, для иностранных товаров, продаваемых внутри страны  $\theta^F$ , – 6, то есть соответствующему умеренному уровню конкуренции, с наценкой 20%.

Коэффициенты Кальво  $\varphi^{HD}$  калибруются на уровне 0,4,  $\varphi^{HF}$  – 0,6,  $\varphi^F$  – 0,4. Насколько мне известно, не существует работ для российской экономики, явно оценивающих эти коэффициенты на микроэкономических данных. Я калибрую коэффициент Кальво для товаров, продаваемых внутри страны, ниже, чем для производств, где товары продаются за рубеж. Это связано с тем, что я предполагаю, что цены экспортеров более жесткие из-за влияния внешних факторов. Таким образом, производители товаров, продаваемых внутри страны, меняют цены в среднем каждые 2 месяца, а экспортеры меняют цены в среднем раз в 4,5 месяца.

Что касается индексации  $\gamma^i$ , где  $i \in \{HD, F, HF, L\}$ , то, как обсуждается выше, этот параметр должен быть меньше единицы для моделирования дисперсии цен между фирмами. Я калибрую этот параметр на уровне 0,4, что обеспечивает достаточный уровень жесткостей в экономике, но при этом все-таки позволяет корректировать цены на предыдущую инфляцию.

Я калибрую коэффициент реакции монетарной политики на отклонение инфляции  $\psi^{PI}$  на уровне 2,5. Коэффициент сглаживания денежно-кредитной политики  $\psi^R$  устанавливается на уровне 0,75.

Таблица 3.1. Калибровка параметров модели

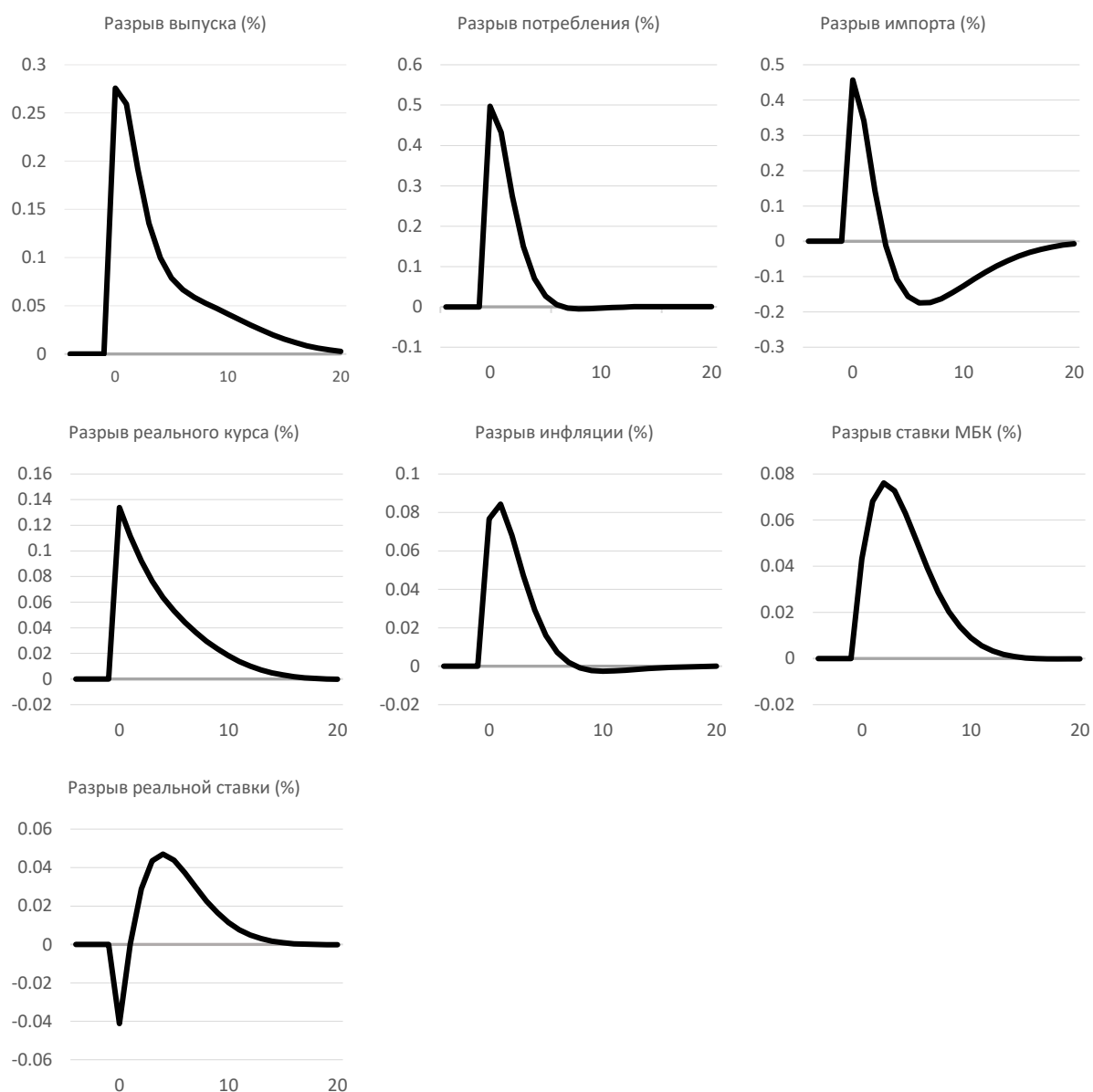
Параметры функции полезности потребителей	
$\beta$ : коэффициент дисконтирования	0,999
$\eta$ : коэффициент эластичности предложения труда по Фришу	1,04
Параметры ценообразования	
$\varphi^{HD}$ : коэффициент Кальво отечественных товаров, продаваемые дома	0,4
$\varphi^{HF}$ : коэффициент Кальво для отечественных товаров, продаваемых за рубежом	0,6
$\varphi^F$ : коэффициент Кальво отечественных товаров, продаваемых дома	0,4
$\gamma^{HD}$ : индексация цен отечественных товаров, продаваемых дома	0,4
$\gamma^{HF}$ : индексация цен отечественных товаров, продаваемых за рубежом	0,4
$\gamma^F$ : индексация цен иностранных товаров, продаваемых дома	0,4
$\theta^{HD}$ : эластичности замещения между отечественными промежуточными товарами-субститутами, продаваемыми внутри страны	6
$\theta^{HF}$ : эластичности замещения между отечественными промежуточными товарами-субститутами, продаваемыми за рубежом	6
$\theta^F$ : эластичности замещения между отечественными промежуточными товарами-субститутами, импортируемыми из-за рубежа	6
Параметры монетарной политики	
$\psi^{PI}$ : коэффициент реакции монетарной политики на отклонение инфляции	2,5
$\psi^R$ : коэффициент сглаживания денежно-кредитной политики	0,75
Параметры премии за риск	

$\rho^{AY}$ : эластичность премии за риск по отношению чистой позиции по иностранным активам к выпуску	0,0155
$\rho^{oil}$ : эластичность премии за риск по цене на нефть	-0,0057
<b>Стационарные состояния</b>	
$\bar{g}_y$ : темп роста ВВП	1,015 <sup>0.15</sup>
<b>Параметры шоков</b>	
$\rho^C$ : персистентность шока предпочтений	0,5
$\sigma^C$ : стандартное отклонение шока предпочтений	6,7
$\rho^a$ : персистентность шока технологий	0,6
$\sigma^a$ : стандартное отклонение шока технологий	0,3
$\rho^{mp}$ : персистентность шока монетарной политики	0,2
$\sigma^{mp}$ : стандартное отклонение шока монетарной политики	1,5
$\rho^{pi}$ : персистентность шока издержек	0,3
$\sigma^{pi}$ : стандартное отклонение шока издержек	3
$\rho^{pi \text{ bar}}$ : персистентность шока тренда издержек	0,9
$\sigma^{pi \text{ bar}}$ : стандартное отклонение тренда шока издержек	0,3
$\rho^{ex}$ : персистентность шока UIP	0,5
$\sigma^{ex}$ : стандартное отклонение шока UIP	0
$\rho^{ex \text{ bar}}$ : персистентность шока тренда UIP	2
$\sigma^{ex \text{ bar}}$ : стандартное отклонение шока UIP	3
$\rho^x$ : персистентность шока экспорта	0,5
$\sigma^x$ : стандартное отклонение шока экспорта	9,5
$\sigma^{x \text{ bar}}$ : стандартное отклонение тренда шока экспорта	1,5
$\rho^{iF}$ : персистентность шока иностранной ставки	0,9
$\sigma^{iF}$ : стандартное отклонение шока иностранной ставки	0,4
$\rho^{iF \text{ bar}}$ : персистентность шока тренда иностранной ставки	0,95
$\sigma^{iF \text{ bar}}$ : стандартное отклонение тренда шока иностранной ставки	0,2
$\rho^{piF}$ : персистентность шока иностранной инфляции	0,3
$\sigma^{piF}$ : стандартное отклонение шока иностранной инфляции	1,7
$\rho^{piF \text{ bar}}$ : персистентность шока тренда иностранной инфляции	0,8
$\sigma^{piF \text{ bar}}$ : стандартное отклонение тренда шока иностранной инфляции	0,2
$\rho^{poil}$ : персистентность шока цены на нефть	0,6
$\sigma^{poil}$ : стандартное отклонение шока цены на нефть	16
$\rho^{poil \text{ bar}}$ : персистентность шока тренда цены на нефть	0
$\sigma^{poil \text{ bar}}$ : стандартное отклонение тренда шока цены на нефть	22

### 3.2. АНАЛИЗ ТРАНСМИССИОННОГО МЕХАНИЗМА

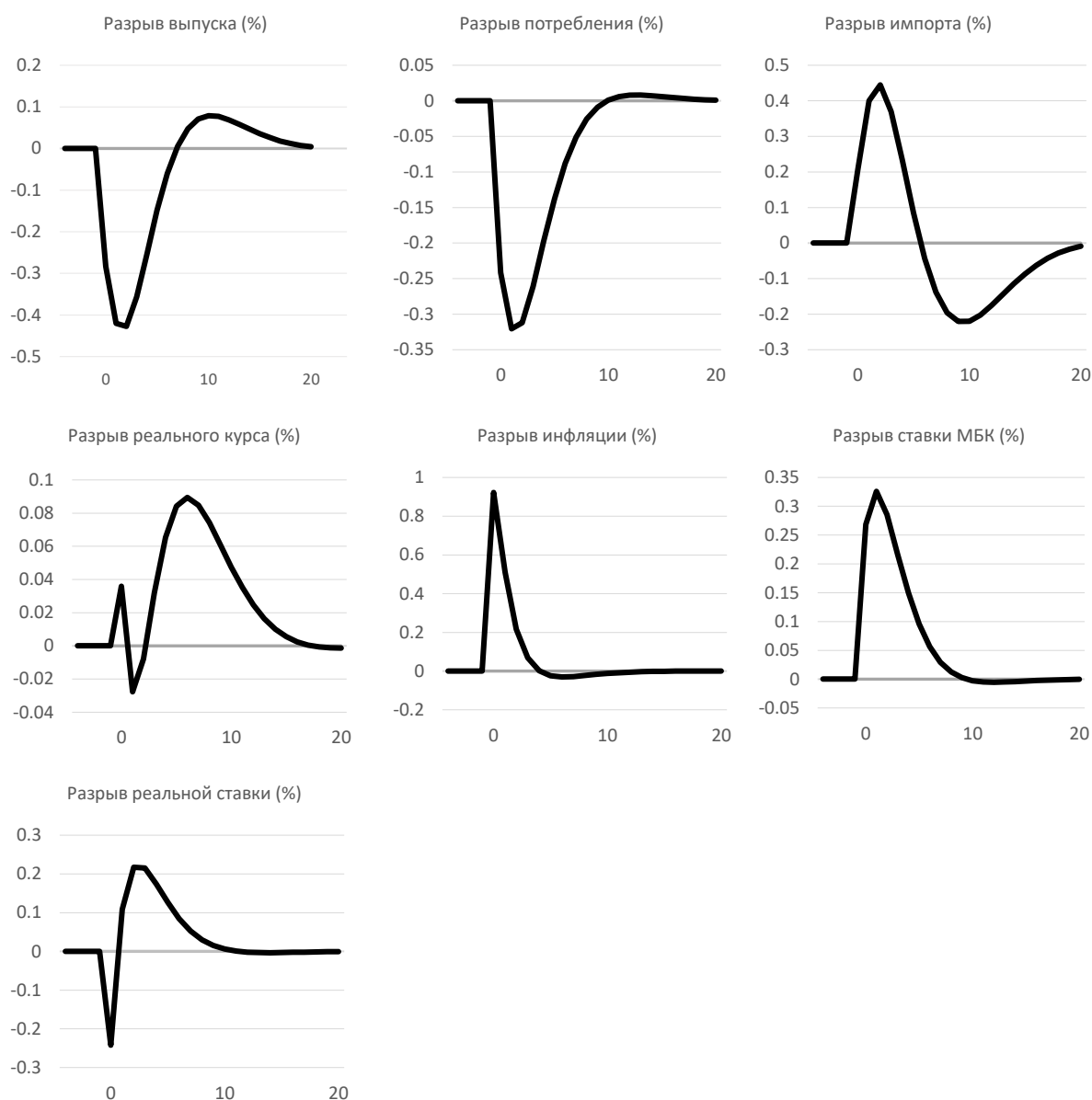
Для анализа свойств модели я строю функции импульсных откликов основных переменных на основные шоки модели.

Рисунок 3.1. Функции импульсных откликов, шок предпочтений



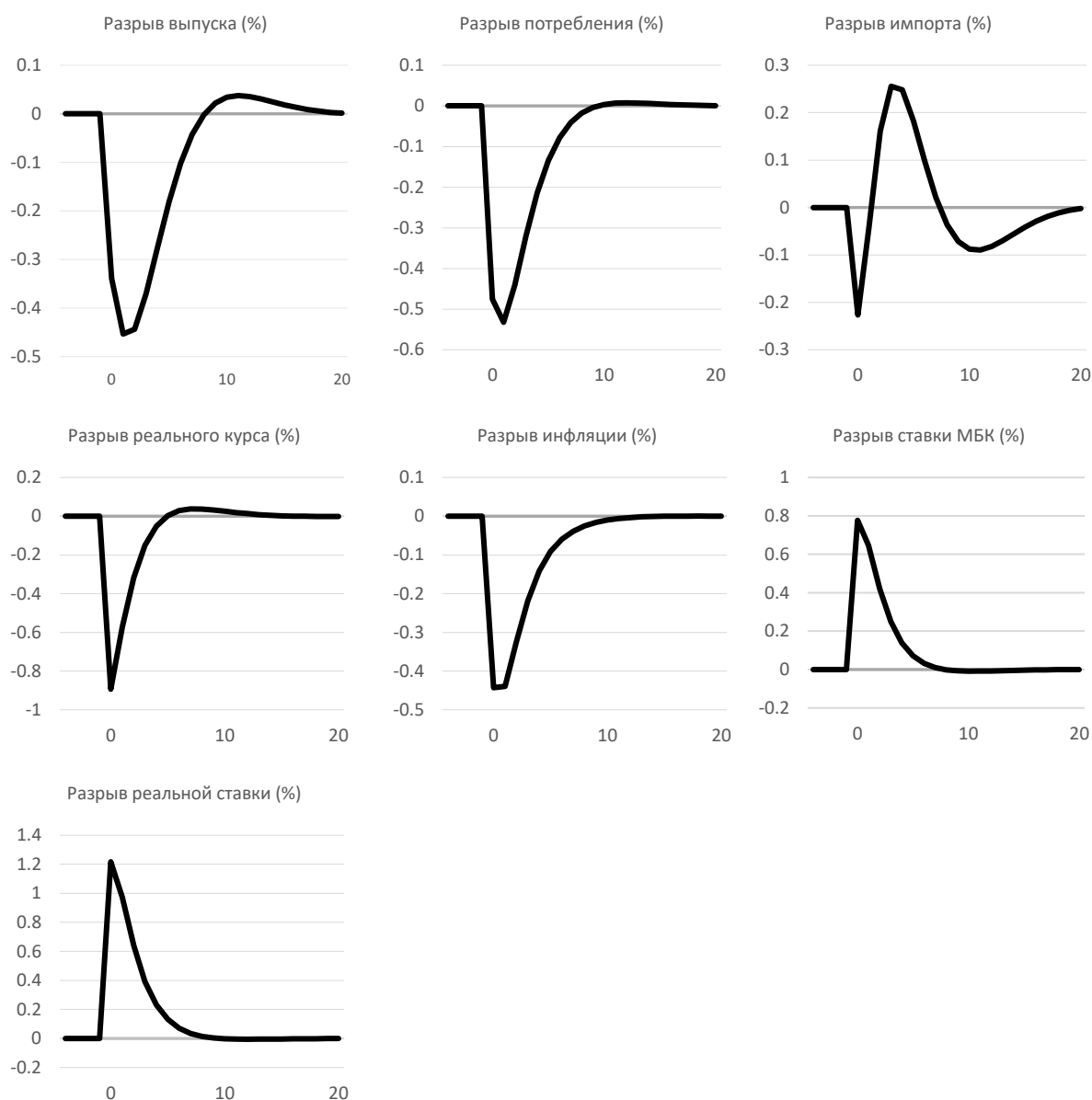
Как видно на рис. 3.1, положительный шок предпочтений приводит к росту потребления. Так как потребительская корзина включает как отечественные, так и импортные товары, то спрос на товары обеих категорий растет. Импорт растет вслед за увеличением потребительского спроса на него. Рост спроса приводит к росту цен и положительному разрыву инфляции. Это, в свою очередь, побуждает центральный банк повышать процентную ставку. Так как в первые периоды после шока реальная ставка процента снижается, реальный курс ослабляется. Затем, по мере роста реальной ставки курс укрепляется и возвращается к равновесному состоянию.

Рисунок 3.2. Функции импульсных откликов, шок издержек



На рис. 3.2 показаны отклики основных переменных модели на положительный 1%-ный шок издержек. Положительный шок издержек приводит к росту цен на отечественные товары через кривую Филлипса. Для стабилизации инфляции центральный банк повышает ставку процента. Повышение ключевой ставки приводит к перераспределению полезности потребителей между текущим и будущим периодами в пользу будущего и, следовательно, к падению потребления текущего периода. Так как потребительская корзина включает как отечественные, так и импортные товары, то спрос на товары обеих категорий снижается. На реальный валютный курс действуют два разнонаправленных эффекта. Увеличение процентной ставки через паритет процентных ставок влияет на курс в сторону его укрепления. В тоже время возросший спрос на иностранные товары (то есть увеличение спроса на иностранную валюту) влияет на валютный курс в сторону ослабления. На импорт также действуют два эффекта: сначала укрепившийся курс делает иностранные товары относительно более дешевыми и открывает положительный разрыв по импорту. Затем снижение потребительского спроса переводит разрыв по импорту в отрицательную область.

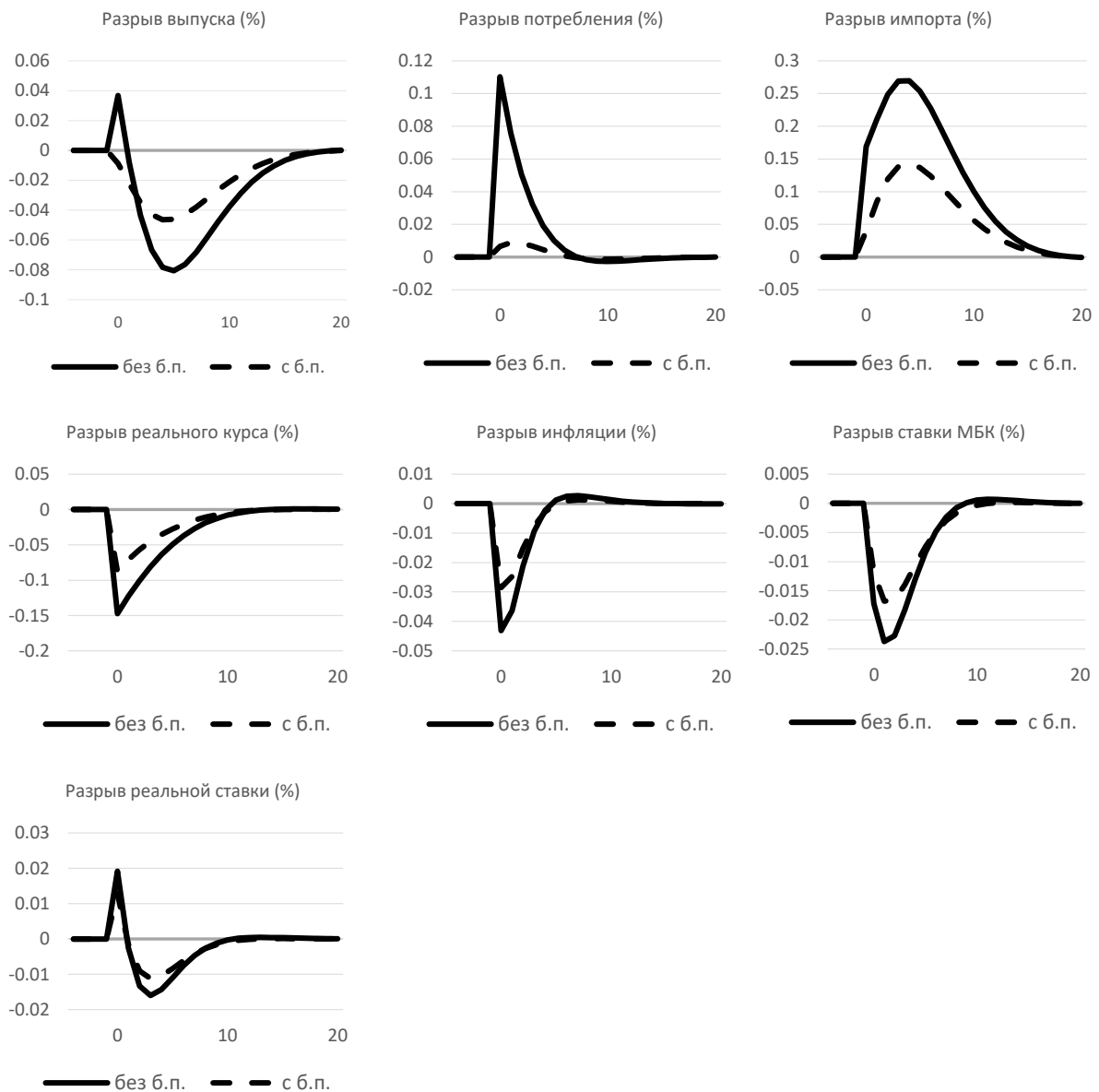
Рисунок 3.3. Функции импульсных откликов, шок монетарной политики



На рис. 3.3 показаны отклики основных переменных модели на 1%-ный положительный шок денежно-кредитной политики (ставка растет). Повышение ключевой ставки приводит к перераспределению полезности потребителей между текущим и будущим периодами в пользу будущего и, следовательно, к падению потребления текущего периода. Так как потребительская корзина включает как отечественные, так и импортные товары, то спрос на товары обеих категорий снижается. Снижение спроса приводит к снижению цен и отрицательному разрыву инфляции. Кроме того, повышение ставки в соответствии с непокрытым паритетом процентных ставок приводит к укреплению реального валютного курса. В результате этого импортные товары становятся относительно более дешевыми, что также вносит дезинфляционный эффект.

Отклик на шок цены на нефть ожидаемо зависит от наличия или отсутствия фискального правила в модели.

Рисунок 3.4. Функции импульсных откликов, шок цены на нефть



На рис. 3.4 показаны отклики основных переменных модели на 1%-ный положительный шок цены на нефть (цена нефти растет). Рост цены на нефть приводит к снижению премии за риск и, соответственно, укреплению курса. При более крепком курсе иностранные товары становятся относительно более дешевыми. Это приводит к открытию отрицательного разрыва по инфляции, а импорт возрастает. Центральный банк снижает ключевую ставку для возвращения инфляции к цели. Снижение процентной ставки приводит к перераспределению доходов потребителей в пользу потребления вместо сбережения, таким образом, потребление растет. Выпуск снижается из-за того, что потребление растет меньше, чем импорт. В ситуации с бюджетным правилом отклики имеют ту же направленность, что и при его отсутствии, но влияние шока на переменные модели ниже, так как действие правила частично нивелирует эффекты валютного курса.

На основе анализа импульсных откликов можем говорить, что реакция переменных на шоки модели отражает механизмы, характерные для неокейнсианских DSGE-моделей малой открытой экономики (например, (Medina, 2007)).

### 3.3. ПРОВЕРКА СООТВЕТСТВИЯ МОДЕЛИ ДАННЫМ

Для оценки адекватности модели и ее соответствия данным выполняются симуляции по линейной<sup>4</sup> модели с таргетом 4% на 100 000 периодов. Симуляции производятся с помощью встроенной функции пакета IRIS<sup>5</sup> для Matlab. Для симуляции используются все шоки модели, кроме шока ДКП. Это связано с тем, что, как я предполагаю, центральный банк использует свою ключевую ставку для реакции на другие шоки, но не создает шоки своей политикой. Шоки для симуляций берутся из нормального распределения.

В таблице 3.2 приводится сравнение стандартных отклонений и коэффициентов автокорреляции наблюдаемых данных за период с II квартала 2003 г. по II квартал 2021 г. и симулированных данных.

Таблица 3.2. Сравнение характеристик наблюдаемых и симулированных данных

	Стандартное отклонение		Коэффициент автокорреляции AR(1)	
	Модель	Данные	Модель	Данные
Разрыв потребления (%)	5,99	5,87	0,69	0,80
Разрыв экспорта (%)	3,05	3,33	0,32	0,77
Разрыв ставки МБК (%)	2,28	2,59	0,87	0,88
Разрыв инфляции (%)	4,41	3,62	0,43	0,48
Разрыв реального курса руб./долл. (%)	11,52	13,87	0,45	0,92
Разрыв цены на нефть (%)	20,69	18,56	0,61	0,75
Разрыв внешней процентной ставки (%)	0,89	1,03	0,89	0,96
Разрыв внешней инфляции (%)	1,79	1,39	0,33	0,25

Как видно из таблицы, значения рассматриваемых характеристик симулированных и фактических данных близки, а следовательно, полученная модель достаточно хорошо отражает фактическую динамику переменных.

В таблице 3.3 приводится аналогичное сравнение для модели с бюджетным правилом.

<sup>4</sup> Как модель с ZLB, так и модель без ZLB логлинеаризуются вокруг устойчивого состояния. При этом модель с ZLB при этом не становится линейной, так как условие ZLB само по себе является нелинейным. Поэтому здесь и далее для краткости модель без ZLB называется линейной, а модель с ZLB – нелинейной.

<sup>5</sup> IRIS – пакет для макроэкономического моделирования и прогнозирования в Matlab.

Таблица 3.3. сравнение характеристик наблюдаемых и симулированных данных для модели с бюджетным правилом

	Стандартное отклонение		Коэффициент автокорреляции AR(1)	
	Модель	Данные	Модель	Данные
Разрыв потребления (%)	5,47	5,87	0,70	0,80
Разрыв экспорта (%)	3,04	3,33	0,32	0,77
Разрыв ставки МБК (%)	2,22	2,59	0,87	0,88
Разрыв инфляции (%)	4,35	3,61	0,42	0,48
Разрыв реального курса руб./долл. (%)	11,06	13,86	0,43	0,92
Разрыв цены на нефть (%)	20,69	18,56	0,61	0,75
Разрыв внешней процентной ставки (%)	0,89	1,03	0,89	0,96
Разрыв внешней инфляции (%)	1,78	1,39	0,33	0,25

Как видно из таблицы, для этой версии модели симулированные характеристики также близки к рассчитанным по данным. При этом стоит обратить внимание, что стандартные отклонения переменных меньше или равны тем, что рассчитаны для модели без правила. Это иллюстрирует действие бюджетного правила – этот механизм снижает волатильность переменных.

Стоит отметить, что на используемом мной интервале с II квартала 2003 г. по II квартал 2021 г. в экономике России произошло несколько существенных событий: переход к режиму инфляционного таргетирования в конце 2014 г., несколько пересмотров параметров бюджетного правила и периоды, когда правило отменялось, кризисы 2008, 2014 и 2020 годов. Однако эти периоды слишком коротки, чтобы получать на них надежные оценки. Например, период после перехода к инфляционному таргетированию включает только 32 точки на квартальных данных. Кроме того, целью данного эксперимента является только проверка возможности получения с помощью модели переменных с характеристиками, близкими к характеристикам реальных данных. Результаты показывают, что эти характеристики достаточно близки, и, таким образом, полученные по модели выводы можно считать релевантными для экономики России.

## 4. ОПТИМАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ ЦЕЛИ ПО ИНФЛЯЦИИ

Данный раздел посвящен обсуждению результатов симуляций по построенной модели. Симуляции производятся на 12 500<sup>6</sup> периодов с помощью встроенной функции пакета IRIS для Matlab. В работе рассматривались значения от 0,5% годовых до 4% годовых с шагом 0,1.

<sup>6</sup> Это обусловлено компромиссом между точностью и количеством времени, требуемым для расчетов.



По полученным данным я рассчитываю вероятности нахождения на ZLB и нахожу оптимальный уровень цели на основании структурной функции потерь. Я также изучаю зависимость оптимального уровня цели по инфляции от реальной нейтральной процентной ставки.

## 4.1. ВЕРОЯТНОСТЬ НАХОЖДЕНИЯ НА ZLB

Полученные по симулированным данным вероятности нахождения на ZLB по модели с бюджетным правилом и без бюджетного правила представлены на рис. 4.1 и 4.2.

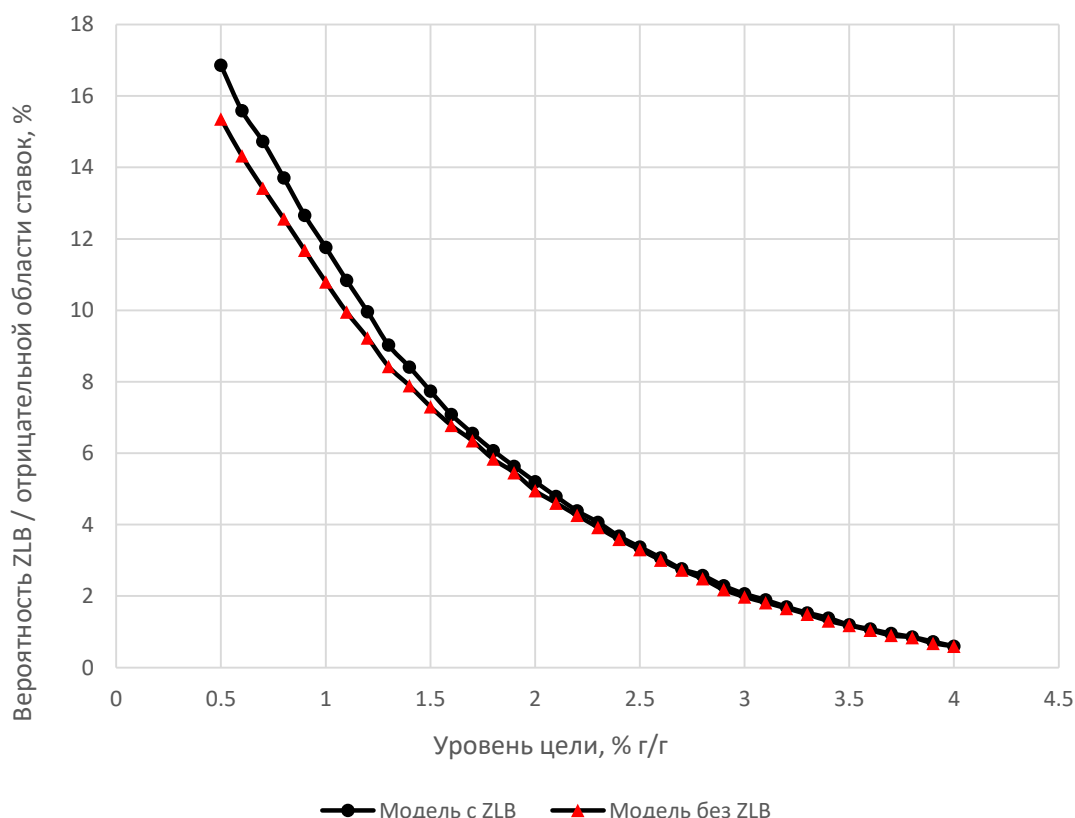
Для базовой модели без бюджетного правила вероятность нахождения в отрицательной области процентных ставок при таргетируемой инфляции 4% составляет около 1%.

Вероятность рассчитывается по следующей формуле:

$$prob^{ZLB} = 100 * \frac{\sum_{i=0}^N i_t^{ZLB} \leq 0}{N},$$

где  $prob^{ZLB}$  – вероятность нахождения на ZLB / в отрицательной области процентных ставок,  $N$  – количество периодов симуляций.

Рисунок 4.1. Вероятность ZLB в базовой модели

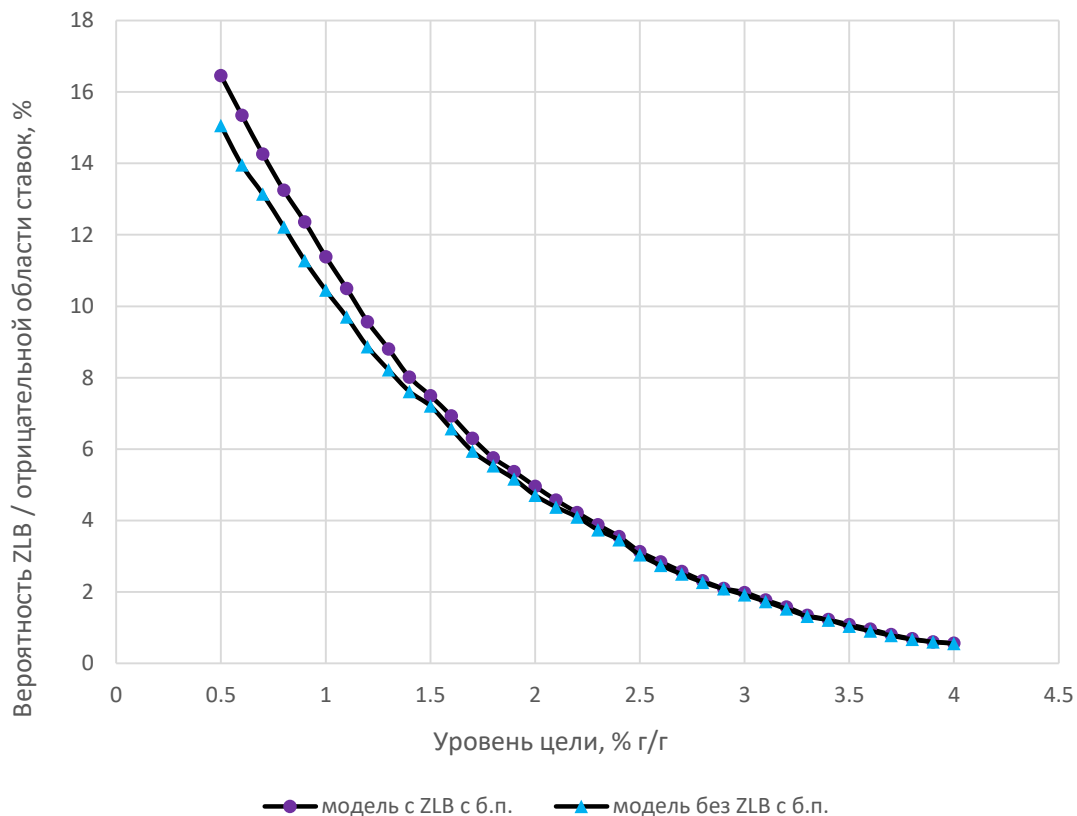


Вероятность ZLB возрастает при снижении уровня цели по инфляции. Это связано с тем, что номинальная процентная ставка складывается из реальной процентной ставки и равновесной инфляции. При неизменной реальной процентной ставке по мере снижения цели по инфляции номинальная процентная ставка также снижается и приближается к нулевой нижней границе. При

достаточно малом значении номинальной ставки даже небольшие шоки ведут к достижению нулевой нижней границы, и, таким образом, вероятность нахождения на ZLB растет по мере снижения цели по инфляции.

Кроме того, в ситуации, когда центральный банк не может опускать ставку ниже нуля, ему требуется больше времени для стабилизации экономики, чем в ситуации, когда такого ограничения нет.

Рисунок 4.2. Вероятность ZLB по модели с бюджетным правилом



В случае наличия в модели бюджетного правила соотношение модель с ZLB / модель без ZLB и отрицательная зависимость между вероятностью ZLB и уровнем таргета, описанные выше, остаются неизменными. При этом для каждого уровня цели такая вероятность становится ниже, так как часть шоков нивелируется правилом.

## 4.2. КРИТЕРИЙ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОСТИ

Как обсуждается выше, для исследования вопроса оптимального уровня цели по инфляции необходимо использовать структурную функцию потерь. Я использую функцию с микрообоснованиями как в Woodford (2001). Эта функция представляет собой аппроксимацию второго порядка функции полезности потребителей. Функция такого вида имеет несколько важных преимуществ. Во-первых, это структурная функция, естественным образом учитывающая механизмы и параметры модели. Во-вторых, она отражает благосостояние потребителей, то есть цель по инфляции выбирается исходя не из абстрактной задачи центрального банка, а опираясь на полезность домохозяйств. В-третьих, эта функция рассматривается в отклонениях от естественного уровня переменных (то есть переменных в экономике без жесткостей) и, таким образом, позволяет

учесть издержки от инфляции с учетом существующих в конкретной экономике жесткостей. Из последнего свойства следует, что значение этой функции – отрицательная величина, так как в экономике без жесткостей номинальные переменные не влияют на реальные переменные, и, таким образом, потребители не несут издержки от высокой инфляции. Таким образом, функция отражает потери общества в терминах отклонения от экономики с гибкими ценами.

Для моей спецификации модели эта функция имеет вид:

$$\begin{aligned} & \log(C_t - \eta * C_{t-1} * e^{-\zeta_{z,t}}) - \frac{1}{1 + \sigma_L} * \int_0^1 (N_t(h))^{1+\sigma_L} dh = \\ & \frac{1}{1 - \eta} * \left[ \frac{C_t - C^n}{C_t} - \eta * \frac{C_{t-1} - C^n}{C_t} - \frac{1}{2} * \frac{1}{1 - \eta} * \left( \frac{C_t - C^n}{C_t} \right)^2 \right. \\ & \quad + \frac{1}{1 - \eta} * \left( \frac{C_t - C^n}{C_t} \right) * \left( \frac{C_{t-1} - C^n}{C_t} \right) - \frac{1}{2} * \frac{\eta^2}{1 - \eta} \\ & \quad * \left( \frac{C_{t-1} - C^n}{C_t} \right)^2 + \zeta_{c,t} * \frac{C_t - C^n}{C_t} - \eta * \zeta_{c,t} \\ & \quad * \frac{C_{t-1} - C^n}{C_t} - \frac{\eta}{1 - \eta} * \zeta_{z,t} * \frac{C_t - C^n}{C_t} + \frac{\eta}{1 - \eta} \\ & \quad \left. * \zeta_{z,t} * \left( \frac{C_{t-1} - C^n}{C_t} \right) \right] \quad \left. \vphantom{\log(C_t - \eta * C_{t-1} * e^{-\zeta_{z,t}})} \right\} \text{Потребление} \quad (4.2.1) \\ & - \int_0^1 \left( (N^n)^{1+\sigma_L} * \frac{N_t(h) - N^n}{N^n} + \frac{1}{2} * \sigma_L * (N^n)^{1+\sigma_L} \right. \\ & \quad \left. * \left( \frac{N_t(h) - N^n}{N^n} \right)^2 \right) dh \quad \left. \vphantom{\log(C_t - \eta * C_{t-1} * e^{-\zeta_{z,t}})} \right\} \text{Труд} \quad (4.2.2) \end{aligned}$$

где  $C$  – потребление,  $N$  – труд,  $C^n$  – естественный уровень потребления,

$N^n$  – естественный уровень труда,  $h$  – тип труда,  $\eta$  – привычки в потреблении,

$\zeta_c$  – шок потребления,  $\zeta_z$  – шок производительности,

$\sigma_L$  – эластичность труда по Фришу.

### 4.3. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО УРОВНЯ ЦЕЛИ И ВЕРОЯТНОСТЬ ZLB

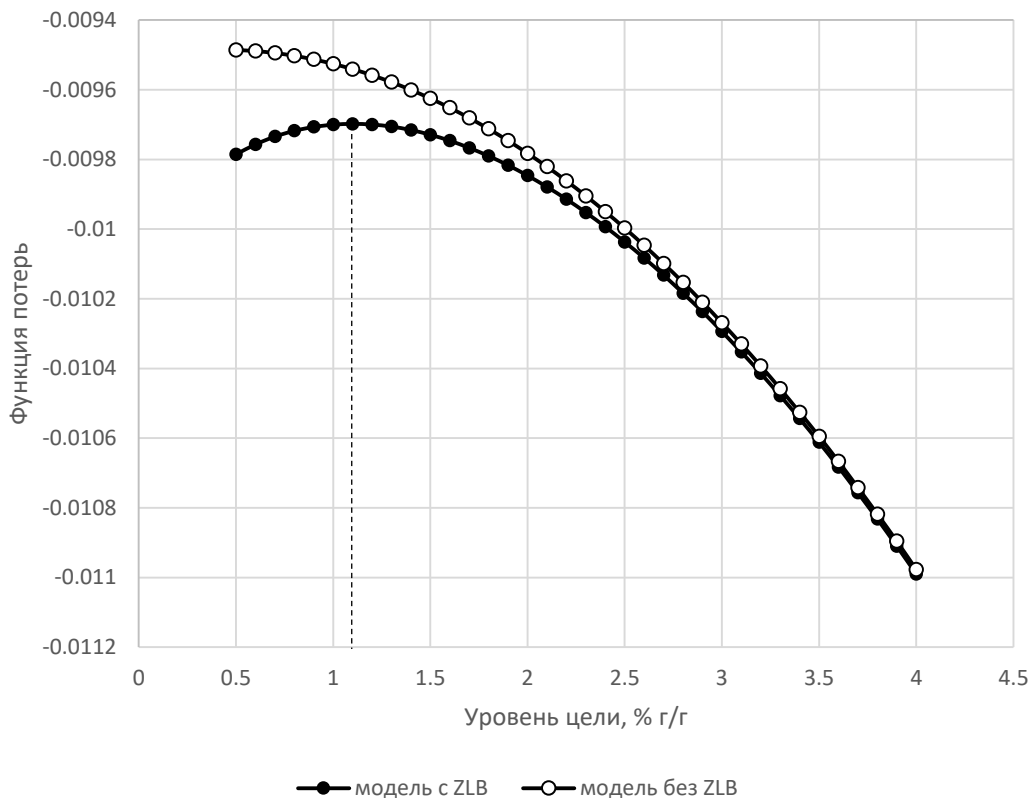
Выбор оптимального уровня цели по инфляции основывается на функции потерь, приведенной в подразделе 4.2. Для каждого уровня таргета на основании симулированных переменных рассчитывается значение функции потерь, затем вычисляется ее среднее значения за все периоды, то есть рассчитывается безусловно математическое ожидание. При этом я предполагаю, что для каждого периода функция потерь имеет одинаковую ценность. Такая предпосылка связана с тем, что количество периодов симуляций не является прямой аналогией временной шкалы, а скорее повторением эксперимента с целью приблизить выборочное среднее к фактическому.

Рассчитывая функцию потерь таким образом, получаем, что в итоге каждому уровню таргета соответствует определенное значение функции потерь. Оптимальным считается таргет, которому соответствует наименьшее (по модулю) значение функции потерь.

Я провожу симуляции для таргетов от 0,5 до 4% с шагом в 0,1. Как описывается выше, для каждого такого таргета получено соответствующее значение функции потерь. Такие пары рассчитываются

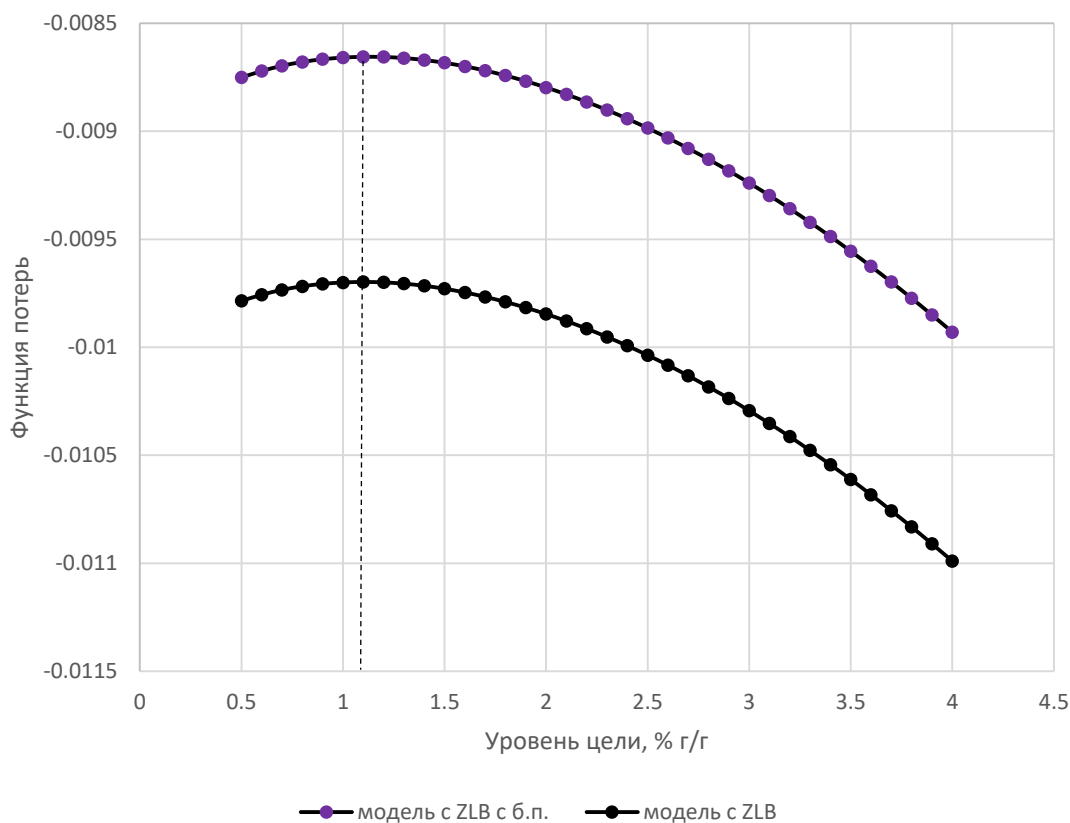
как для модели с ZLB (нелинейной), так и для модели без ZLB (линейной). Результаты представлены на рис. 4.3.

Рисунок 4.3. Функция потерь для базовой модели



Хотелось бы обратить внимание на несколько моментов. Во-первых, значения функции потерь для каждого уровня таргета как для линейной, так и для нелинейной модели отрицательны. Как обсуждалось ранее, эта функция задается в отклонениях от переменных в экономике без жесткостей и отражает потери экономики от ценовой дисперсии. Во-вторых, для линейной модели функция потерь возрастает (по модулю) при убывании уровня таргета – в отсутствии ограничения нулевой нижней границы, чем ниже инфляция, тем потребителям лучше в терминах их благосостояния. В-третьих, в случае добавления ограничения нулевой нижней границы процентных ставок (модель с ZLB) возникает компромисс между потерями от слишком высокой инфляции и ограничением нулевой границы процентных ставок. При этом при достаточно высоких уровнях цели преобладает первый эффект, а по мере снижения уровня цели начинает преобладать второй. Оптимум в терминах наименьшего (по модулю) значения функции потерь потребителей достигается при уровне цели 1,1%.

Рисунок 4.4. Функция потерь для модели с бюджетным правилом



На рис. 4.4 показана функция потерь для модели с бюджетным правилом (б.п.) и для базовой модели. При наличии в модели бюджетного правила оптимальный уровень цели остается прежним – 1,1%. При этом стоит отметить, что в целом для модели с бюджетным правилом функция потерь по модулю меньше, чем для экономики без такого правила при каждом соответствующем уровне таргета, так как бюджетное правило нивелирует часть шоков, и при прочих равных вероятность попадания на ZLB снижется. Вероятно, при рассмотрении меньшего шага выбираемых оптимальных ставок для модели с бюджетным правилом выбиралась бы более низкая цель. Но учитывая, что выбор цели даже с точностью до 0,1 представляет скорее академический, чем практический интерес, и учитывая также длительность вычислений, такие эксперименты решили не проводить.

#### 4.4. ОПТИМАЛЬНАЯ ИНФЛЯЦИЯ И РЕАЛЬНАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

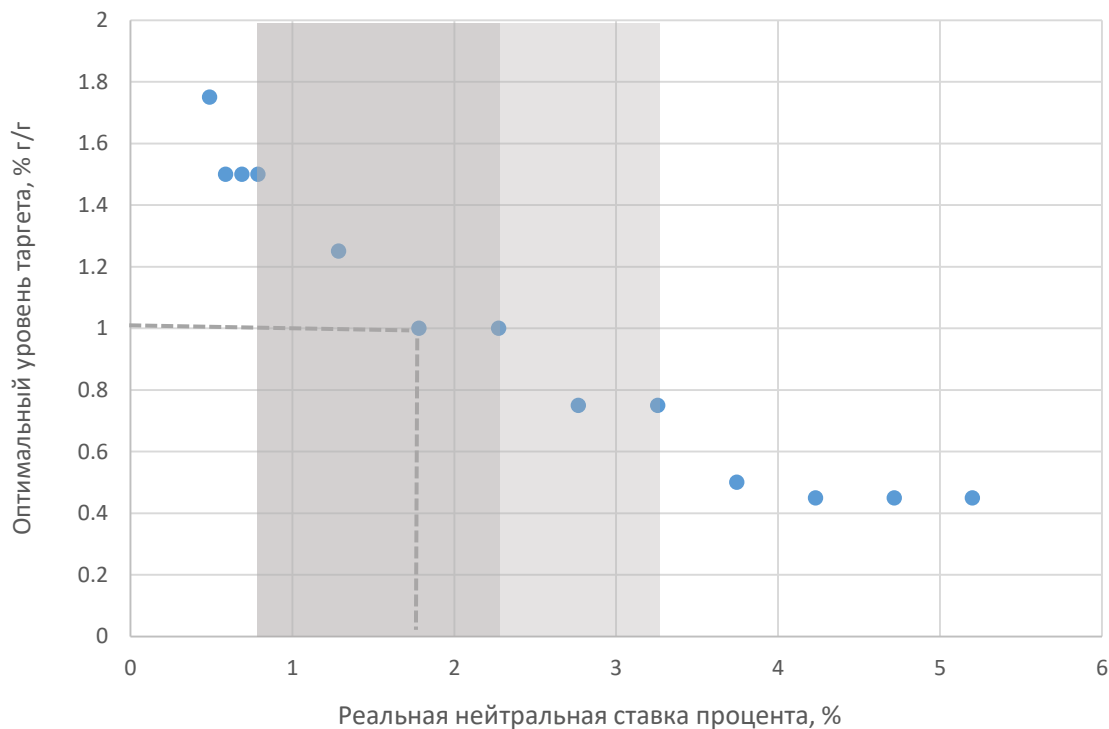
При изучении вопроса выбора оптимального уровня цели необходимо учитывать величину равновесной реальной процентной ставки. Как обсуждается в разделе 3, я предполагаю это значение равным 1,78% в базовой калибровке.

Для изучения влияния разных значений реальной процентной ставки на выбор оптимального таргета в рамках моей модели я произвожу симуляции (параметры описаны в начале этого раздела), варьируя реальную ставку с помощью параметра роста экономики (предполагаем рост от 0,2 до 5%, что соответствует реальной ставке от 0,48 до 5,2%), и выбираю для таких реальных ставок оптимальный уровень таргета от 0,5 до 4% с шагом 0,25. Оптимальный уровень цели выбирается так же, как и ранее, на основании функции потерь потребителей.

На рис. 4.5 точки обозначают пары  $(r^*, \pi^*)$ , где  $r^*$  – реальная нейтральная процентная ставка,  $\pi^*$  – оптимальный уровень таргета. Я получаю, что при повышении реальной ставки в экономике оптимальный уровень таргета снижается.

Светло-серой зоной на рис. 4.5 обозначена область 1–3% – текущая консенсус-оценка реальной нейтральной ставки аналитиков и исследователей для России. Темно-серым цветом обозначен диапазон 1–2%, который приводит в докладах о денежно-кредитной политике Банк России. Как видно на рис. 4.5, для более широкого диапазона оптимум лежит в интервале  $[0,75; 1,5]$ , а для более узкого интервала – в диапазоне  $[1; 1,5]$ .

Рисунок 4.5. Оптимальный уровень таргета и реальная нейтральная процентная ставка



## 4.5. РОБАСТНОСТЬ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

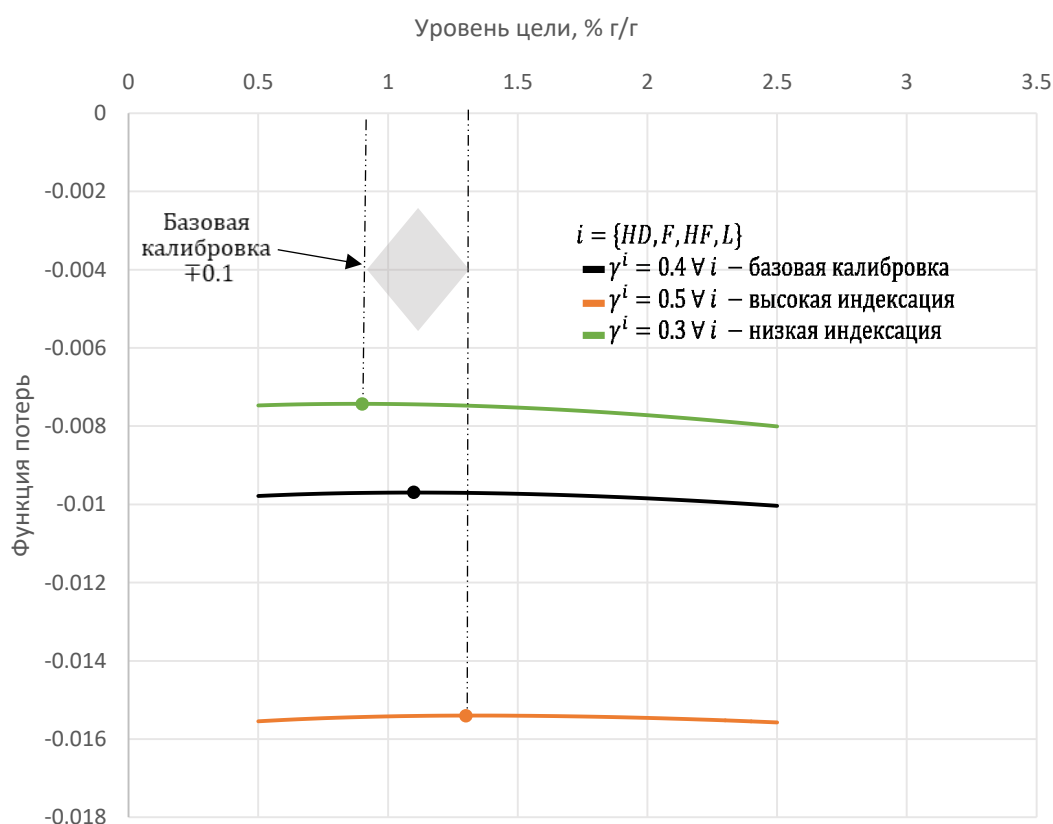
Для проверки робастности результатов я рассматриваю функции потерь при изменении некоторых параметров модели, таких как степень индексации и коэффициент Кальво. Эти параметры выбраны, так как оценка их истинных значений исходя из макроданных представляет наибольшую сложность и они, как правило, лучше всего оцениваются на микроданных. При этом для России исследований, оценивающих эти коэффициенты, крайне мало. Кроме того, жесткости в экономике непосредственно создают механизм влияния инфляции на реальные переменные, и в связи с этим важно понимать, как меняются выводы модели об оптимальном таргете при изменении этих коэффициентов.

Я строю функции потерь для отклонений коэффициентов по принципу базовая калибровка  $\pm 0,1$ . Для коэффициентов, лежащих в интервале  $(0,1)$ , такое изменение составляет не менее 10% от первоначального значения.

## Альтернативная калибровка – степень индексации

Первый набор коэффициентов, который я рассматриваю, это степень индексации. Как видно на рис. 4.6, при предположении, что степень индексации лежит в интервале  $[0,3; 0,5]$ , оптимальная ставка по инфляции лежит в интервале  $[0,9; 1,3]$ . Важно, что при всех исследуемых вариациях коэффициентов сохраняется предсказываемая теорией логика – чем ближе степень индексации к совершенной (так как равна единице), тем более высокий уровень таргета выбирается в качестве оптимального. Логика этой взаимосвязи следующая: при очень низкой степени индексации фирмы практически не меняют цены с учетом инфляции, дисперсия цен возрастает, оказывая негативное влияние на потребителей. Таким образом, в терминах благосостояния потребителей оптимальной будет более низкая инфляция, несмотря на потери от ZLB.

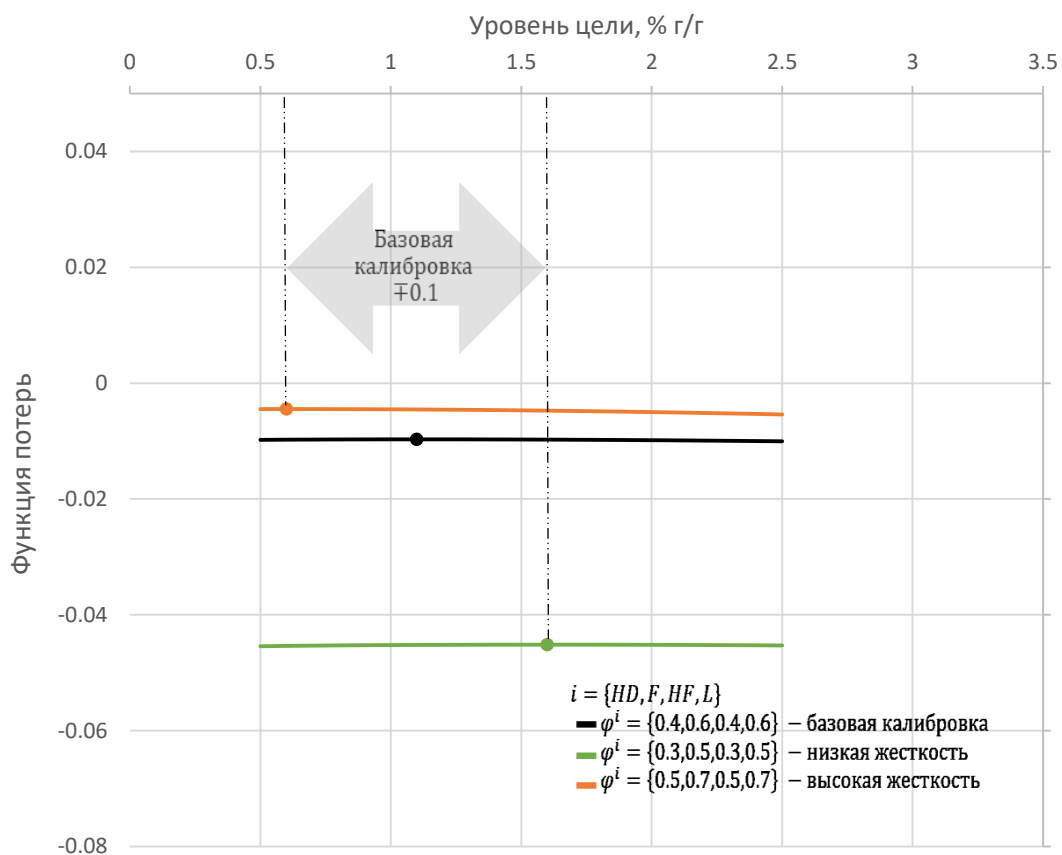
Рисунок 4.6. Функция потерь. Альтернативная калибровка – степень индексации



## Альтернативная калибровка – коэффициент Кальво

Второй набор коэффициентов, который я рассматриваю, это коэффициенты Кальво. Как видно на рис. 4.7, при предположении, что коэффициент отклоняется от базовой калибровки на  $\pm 0,1$ , оптимальная ставка по инфляции лежит в интервале  $[0,6; 1,6]$ . Так же как в предыдущем пункте, важно, что при всех исследуемых вариациях коэффициентов сохраняется предсказываемая теорией логика – чем выше жесткость, тем более низкий уровень инфляции выбирается. Логика этого взаимосвязи похожа на логику предыдущего пункта. Если цены очень жесткие, то есть коэффициент Кальво высок, то дисперсия цен возрастает, и более низкая цель становится предпочтительнее.

Рисунок 4.7. Функция потерь. Альтернативная калибровка – коэффициент Кальво



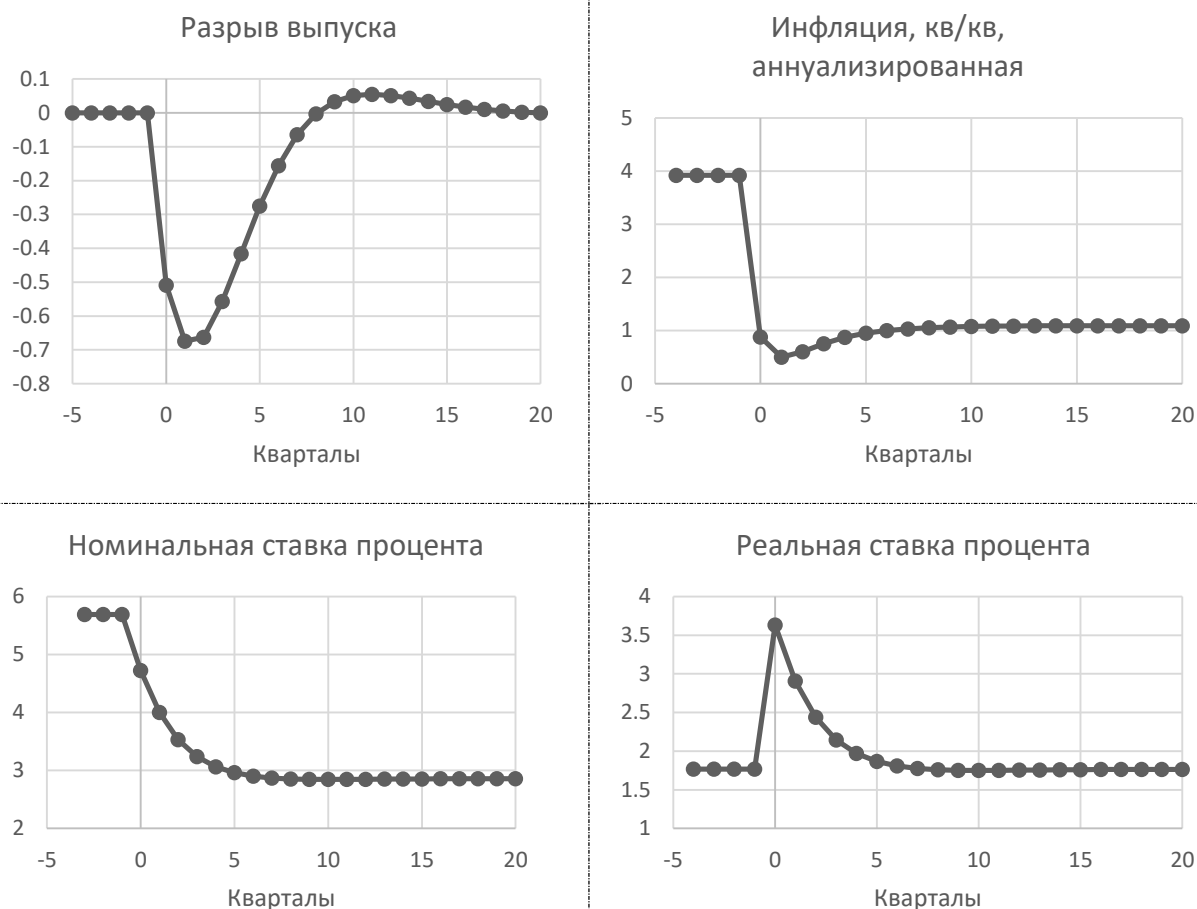
#### 4.6. ИЗДЕРЖКИ ОТ СНИЖЕНИЯ ТАРГЕТА ПО ИНФЛЯЦИИ

Ключевым вопросом этого раздела являются издержки перехода к новому (более низкому) уровню цели. Сначала я исследую динамику перехода от текущего таргетируемого Банком России уровня инфляции 4% к найденному мной оптимальному для российской экономики таргету 1,1%.

Я исследую переход к новой цели на основании импульсных откликов переменных построенной в этой работе модели на шок начальных условий. Полученные траектории представлены на рис. 4.8.



Рисунок 4.8. Импульсные отклики переменных при переходе к новой цели



Как видно на рис. 4.8, нашей экономике требуется около 20 кварталов для подстройки к новому равновесию и возвращению выпуска на потенциальный уровень. Схожие результаты в своей работе получают Ascari and Ropele (2012) для экономики США. При этом кумулятивные потери по квартальному выпуску для экономики России составляют около 3%.

Как обсуждается в Ascari and Ropele (2012), в качестве индикатора потерь от перехода к более низкому уровню таргета обычно используется коэффициент потерь SR:

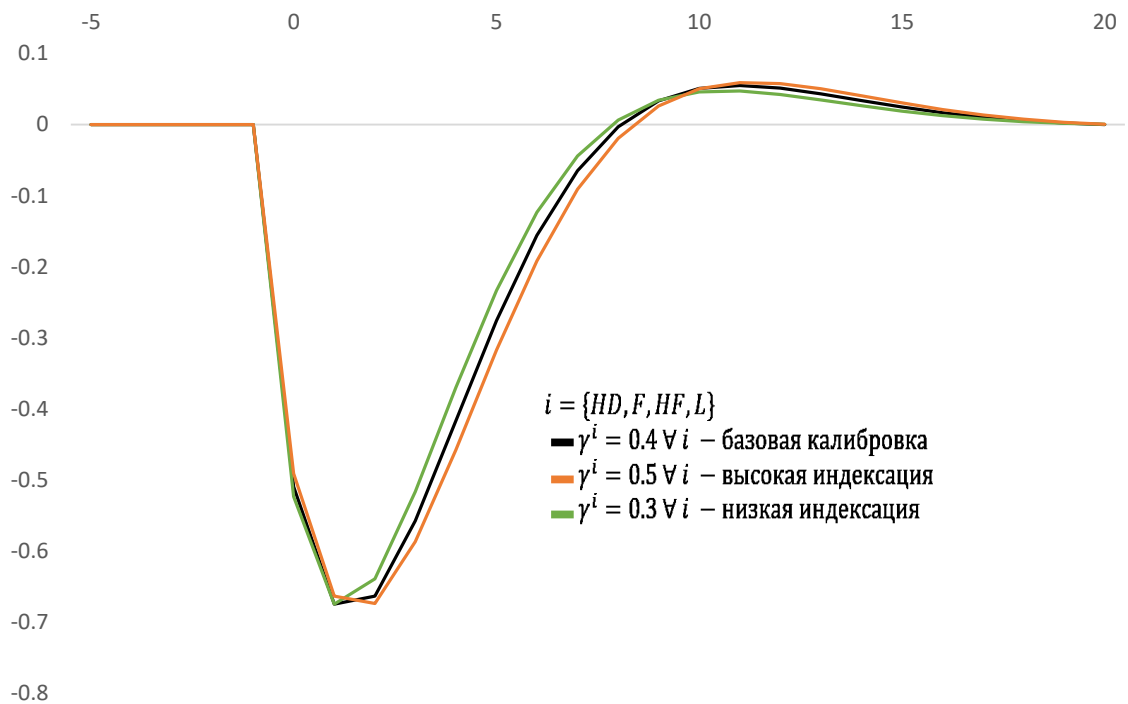
$$SR = - \frac{\sum_{t=0}^T (\hat{y}_t)}{\pi_{high}^* - \pi_{low}^*},$$

где  $\hat{y}_t$  – отклонение выпуска от равновесного значения,  $T$  – количество периодов, за который разрыв выпуска закрывается.

Я рассчитываю этот коэффициент на основе приведенных выше импульсных откликов. Для моей модели этот коэффициент равен 1,03.

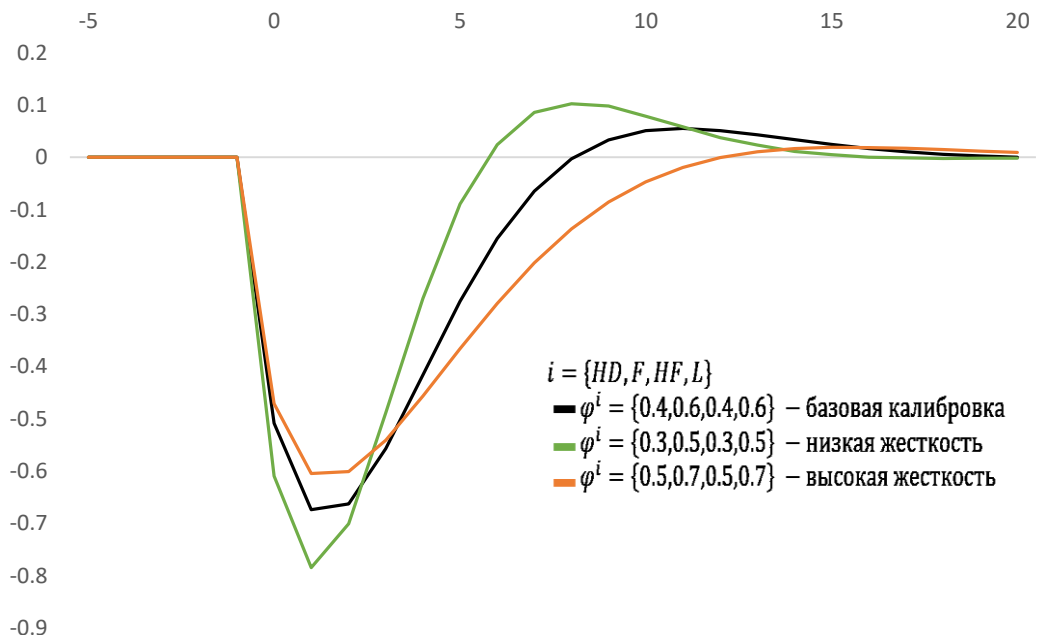
Для проверки робастности результатов я рассчитываю коэффициент потерь для альтернативных калибровок. Я использую тот же набор параметров, что и в предыдущем пункте. Импульсные отклики разрыва выпуска при различных вариантах калибровки представлены на рис. 4.9 и 4.10. Я получаю, что для разных калибровок коэффициент потерь лежит в диапазоне [0,84; 1,27].

Рисунок 4.9. Импульсные отклики разрыва выпуска при различных значениях степени индексации



Как видно на рис. 4.9 траектории возвращения разрыва выпуска к равновесию довольно близки при разных степенях индексации. Коэффициент потерь для вариации степени индексации лежит в диапазоне [0,98; 1,08].

Рисунок 4.10. Импульсные отклики разрыва выпуска при различных значениях коэффициента Кальво



Для вариаций коэффициента Кальво траектории закрытия разрыва выпуска отличаются несколько сильнее (рис. 4.10). При более низкой жесткости выпуск сильнее падает, но при этом и его восстановление происходит быстрее; при более высокой жесткости наблюдается обратная ситуация. В итоге коэффициент потерь оказывается в интервале [0,84; 1,27] для этой вариации.

Как обсуждается в Ascari and Ropele (2012), коэффициент SR обычно лежит в диапазоне от 0,5 до 3. Таким образом, полученный мной для базовой калибровки коэффициент 1,03 лежит в этом интервале. Полученный для альтернативных калибровок интервал для SR [0,84; 1,27] также находится в этом диапазоне и лежит ближе к его нижней границе.

Полученный для России коэффициент SR означает, что затраты выпуска при снижении уровня таргета для российской экономики небольшие по сравнению с экономиками США, еврозоны или Великобритании, что может являться дополнительным аргументом в пользу снижения цели. Однако к этому результату следует походить с осторожностью, так как расчет некоторых коэффициентов из этого интервала производился не на основе структурных моделей, а на основе эконометрических моделей, что могло сыграть свою роль в расхождении оценок. Кроме того, как обсуждалось выше, вопрос перехода к новому равновесию включает много практических вопросов и требует дополнительного изучения.

## 5. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе я исследую вопрос выбора оптимального уровня таргета по инфляции с учетом существования компромисса между издержками от высокой инфляции и возрастающей вероятностью столкнуться с проблемой нулевой нижней границы (ZLB) при низкой цели по инфляции. Я нахожу, что для экономики России оптимальным является уровень таргета 1,1% для базовой модели. Это соответствует вероятности нахождения на ZLB около 11%.

Кроме того, исследуя зависимость оптимального уровня таргета от реальной ставки процента, я нахожу, что эта зависимость отрицательная, то есть *ceteris paribus* более высокая реальная ставка позволяет устанавливать более низкий уровень цели по инфляции, причем каждый процентный пункт повышения ставки позволяет снизить таргет примерно на 0,5 процентного пункта.

Я также затрагиваю вопрос перехода к новой цели по инфляции. Для этого в работе рассчитан коэффициент потерь, представляющий собой кумулятивное снижение выпуска, деленное на разницу между старой и новой целями по инфляции. Для моей модели этот коэффициент равен 1,03, что ближе к нижней границе аналогичных показателей для США, еврозоны и Великобритании, то есть для России снижение таргета сопряжено с относительно небольшими затратами ВВП. Стоит отметить также, что коэффициент потерь не учитывает положительные эффекты, которые влечет за собой снижение уровня цели, например снижение волатильности цен. Таким образом, положительные эффекты могут нивелировать часть потерь. С другой стороны, стандартная неокейнсианская DSGE-модель строится в логике рациональных ожиданий, и в моей модели эта предпосылка также выполняется. При ослаблении этой предпосылки потери от перехода могут быть больше, так как ожидания не будут моментально адаптироваться к новым условиям, и центральному банку может потребоваться более медленно снижать (или даже повышать) номинальную ставку процента. Итоговые выгоды/издержки от перехода к более низкой цели зависят от многих факторов (в том числе от того, выгоды/издержки каких экономических агентов мы рассматриваем – потребителей, фирм; период, который мы анализируем, – кратко-, средне- или долгосрочный, типа ожиданий агентов – рациональные, адаптивные, с обучением и так далее) и требуют дополнительного изучения.

Таким образом, на основании проведенного исследования я прихожу к выводу, что, во-первых, при текущем таргете 4% вероятность столкнуться с проблемой ZLB для российской экономики довольно низкая и составляет около 1%. Это соотносится с историческими данными – в действительности экономика России еще ни разу не сталкивалась с этой проблемой. Во-вторых, оптимальной в терминах благосостояния потребителей для экономики России является цель по инфляции 1,1%. При этом уровень таргета отрицательно зависит от реальной ставки процента. Интервалу реальной ставки 1–3% соответствует оптимальный уровень 0,75–1,5%. Кроме того, оптимальный уровень

таргета зависит от параметров модели, таких как жесткость по Кальво и степень индексации. Оптимальное значение таргета с условием описанной выше неопределенности лежит в интервале от 0,6 до 1,6%, что ниже текущей цели Банка России.

Потери выпуска при переходе к новому уровню цели, рассчитанные на основании коэффициента потерь, оказываются ближе к нижней границе интервала, рассчитанного для экономик США, Европы и Великобритании, что является дополнительным аргументом в пользу снижения цели по инфляции.

При интерпретации результатов стоит отметить, что если в части самого факта потерь общества от высокой инфляции и механизма, в соответствии с которым это происходит, в академической литературе существует некоторый консенсус, то для издержек от низкой инфляции и механизма (механизмов) распространения этих издержек разброс мнений более широкий.

Во-первых, вместо проблемы нулевой нижней границы может рассматриваться проблема эффективной нижней границы (Effective Lower Bound – ELB). Наличие в экономике ELB может приводить к тому, что при достижении определенного уровня (больше нуля) ключевой ставки ее дальнейшее снижение не будет приводить к стимулирующему эффекту, а в отдельных случаях может оказывать даже сдерживающий эффект<sup>7</sup>. Таким образом, при наличии в экономике некоторой положительной ELB может быть необходимость устанавливать таргет по инфляции выше, чем если рассматривается проблема ZLB. Хотя в соответствии с описанными выше соображениями теоретически ELB может быть актуальна для экономики России (так же, как и для других развивающихся стран), существуют затруднения, которые не позволяют использовать ее вместо ZLB в качестве ограничения целевого показателя инфляции снизу. Прежде всего, ELB (в отличие от ZLB), вероятно, не является константой. Этот показатель может зависеть от развитости финансовых институтов, сложившихся в экономике рисков, ожиданий экономических агентов, их доверия к проводимой политике, исторически сложившегося в экономике уровня ставок (например, если потребители привыкли к низким ставкам, то ELB может снизиться) и так далее. Кроме того, сам выбранный уровень цели может оказывать влияние на величину ELB. На данный момент для экономики России отсутствуют не только оценки факторов, влияющих на ELB, но даже точечные оценки величины ELB. Таким образом, его использование в качестве ограничения величины таргета снизу требует дополнительных исследований этого механизма.

Во-вторых, в моей модели не нефтяной выпуск предполагается гомогенным, то есть не учитывается влияние относительных цен на выбор оптимального уровня цели. Включение нескольких отраслей в модель, вероятно, создаст дополнительные издержки от низкой инфляции. Однако такое расширение модели значительно усложняет ее структуру и может затруднять интерпретацию результатов.

Существует еще несколько механизмов, позволяющих моделировать издержки от низкой инфляции. Например, Abbritti и др. (2021) включают в неокейнсианскую DSGE-модель трения на рынке труда, эндогенную производительность и жесткость заработной платы в сторону понижения (Downward Wage Rigidity – DWR). Это приводит к асимметричности, которая создает предпосылки для установления более высокой цели, чем та, что признается оптимальной в моделях без таких предпосылок.

В работе Diercks (2017) показывается, что более детальное моделирование финансового сектора (и связанных с ним нелинейностей), чем это принято в стандартных неокейнсианских DSGE-моделях, приводит к более высокому оптимальному уровню таргета. Подробный перечень работ, исследующих оптимальный уровень таргета, представлен в обзоре Diercks (2019).

В целом вопрос оптимальности цели по инфляции, вероятно, будет оставаться ключевой темой экономических исследований в обозримом будущем. Это обусловлено его практической

<sup>7</sup> Это может происходить, если в результате снижения ставки реализуются риски финансовой стабильности: в результате долларизации депозитов и оттока капитала национальная валюта ослабляется, повышается вероятность дефолтов по валютным обязательствам физических и юридических лиц, увеличивается нагрузка на капитал финансовых институтов, и, как следствие, сокращения предложения кредитов.

значимостью для центральных банков, таргетирующих инфляцию, и одновременно слабой разработанностью темы, открывающей множество путей для дальнейших исследований.

Стоит также отметить, что существует несколько практических аспектов, которые могут быть релевантны при переходе к новому уровню цели и которые лежат за пределами данного исследования. Например, я не исследую вопросы: момента перехода к новой цели, каковы должны быть экономические условия и момент экономического цикла, должен ли переход быть осуществлен одномоментно или в несколько этапов, каким образом центральному банку необходимо проводить информационную политику при переходе к новой цели.

Наконец, я сознательно не включаю в модель ограничение на движение капитала и другие изменения, происходящие в экономике России с конца февраля 2022 года. Это связано с тем, что вопрос этой работы – выбор оптимального таргета – является фундаментальным вопросом, и этот выбор необходимо осуществлять исходя из долгосрочной равновесной структуры экономики. Как и для любой модели типа DSGE, выводы моей модели зависят от ее структуры. Сейчас, в период существенной перестройки экономических связей равновесие, к которому придут экономика России и другие мировые экономики, остается неопределенным. И когда пыль осядет и станет ясно, какие из текущих изменений так и останутся временными шоками, а какие станут новой действительностью, мы неминуемо вернемся к этому вопросу.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Abbritti, Mirko, Consolo, Agostino and Weber, Sebastian.** 2021. *Endogenous Growth, Downward Wage Rigidity and Optimal Inflation*, Working Paper Series 2635, European Central Bank.
- Andrade P., Jordi Galí, Hervé Le Bihan, Julien Matheron.** *The Optimal Inflation Target and the Natural Rate of Interest*. 2019.
- Ascari, G. and Ropele, T.** *Sacrifice Ratio in a Medium-Scale New Keynesian Model*. s.l. : Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 44, No. 2-3 (March-April 2012), 2012.
- Ball, L.** *What Determines the Sacrifice Ratio?* s.l. : Monetary Policy, pp. 155–82. Chicago : University of Chicago Press, 1994b.
- Cecchetti, Stephen G., and Robert W. Rich.** *Structural Estimates of the U.S. Sacrifice Ratio*. s.l. : Journal of Business and Economic Statistics, 19, 416–27, 2001.
- Céspedes L.F., García-Cicco J. , Saravia D.** *Monetary Policy at the Zero lower bound: the chilean experience*. 2014.
- Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum, and Charles L. Evans.** *Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy*. s.l. : Journal of Political Economy, 113, 1–45, 2005.
- Chung H., Laforte D., Reifschneider D., Williams J. C.** *Have We Underestimated the Likelihood and Severity of Zero Lower Bound Events?* s.l. : Journal of Money, Credit and Banking, 44, 47–82, 2012.
- Coibion, Gorodnichenko, & Wieland (2012) и Andrade, Gali, Bihan, & Matheron.** *The Optimal Inflation Rate in New Keynesian Models: Should Central Banks Raise Their Inflation Targets in Light of the Zero Lower Bound?* 2019.
- Durand, Jean-Jacques, Maryline Huchet-Bourdon, and Julien Licheron.** *Sacrifice Ratio Dispersion within the Euro Zone: What Can Be Learned about Implementing a Single Monetary Policy?* s.l. : International Review of Applied Economics, 22, 601–21, 2008.
- Gordon, Robert J., and Stephen King.** *The Output Cost of Disinflation in Traditional and Vector Autoregressive Models*. s.l. : Brookings Papers on Economic Activity, 1, 205–42, 1982.
- IMF.** *Country report*. 2021.
- International Monetary Fund, Russian Federation.** *Staff Report for the 2019 Article IV Consultation*. 2019.
- Isakov A., Latypov R.** *The Ibsen Manoeuvre: Yet Another R\* Estimate*. s.l. : VTB Capital Research Alert, (Very) Technical Brief series, 2019.
- Kiley M., Roberts J. M.** *Monetary Policy in a Low Interest Rate World*. s.l. : Brookings Papers on Economic Activity, 48, 317–396, 2017.
- Lawrence J. Christiano, Martin S. Eichenbaum, and Mathias Trabandt.** *On DSGE Models*. 2018.
- Leif B., Husebo T. A., Maih J., Olsen K., Ostnor M.** *Finding NEMO: Documentation of the Norwegian economy model*. 2005.
- Lindé, J.** *DSGE models: still usefull in policy analysis?* 2018.
- Medina, Soto.** *The chilean business cycles through the lens of a stochastic general equilibrium model*. 2007.

**Mikael Apel, Hanna Armelius and Carl Andreas.** *The level of the inflation target.* 2017.

**S., Bernanke B., T., Kiley M. and J.M., Roberts.** *Monetary Policy Strategies for a Low-Rate.* s.l. : AEA Papers and Proceedings, 109, 421–426, 2019.

**Smets, Frank, and Raf Wouters.** *An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area.* s.l. : Journal of the European Economic Association, 1, 1123–75, 2003.

—*Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach.* s.l. : American Economic Review, 97, 586–606, 2007.

**Woodford.** *Interest and Prices.* s.l. : Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.

**WorldBank.** *Russian economic report.* 2021.

**Андреев М.Ю., Полбин А.В.** *Построение оптимальных инструментальных правил ДКП для экономики с высокой зависимостью от экспорта ресурсов в условиях наличия ZLB.* 2021.

**Дробышевский С., Трунин П., Синельникова-Мурылева Е., Макеева Н., Гребенкина А.** *Оптимальная инфляция в России: теория и практика.* s.l. : Экономическая политика Т.15 №4 с.8-29, 2020.

**Крепцев Д., Поршаков А., Селезнев С., Синяков А.** *Равновесная процентная ставка: оценки для России.* 2016.

**ЦБРФ.** *Доклад о денежно-кредитной политике № 2 (38).* май 2022.

—*Доклад о денежно-кредитной политике.* 2022, июль.

—*Основные направления единой государственной денежно-кредитной политики на 2022 год и период 2023 и 2024 годов.* 2021.

**ЦБРФ, ДИП.** *Факторы ценовой инерции: результаты опроса предприятий.* 2017.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### I ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

#### Производители промежуточных отечественных товаров

Промежуточные товары производятся фирмами в условиях монополистической конкуренции в соответствии с производственной функцией:

$$Y_t^{HD}(f) = Z_t L_t(f),$$

где  $Z_t$  – стохастический тренд производительности и

$$Z_t = Z_{t-1} e^{\gamma_t^a}.$$

Промежуточные товары производятся с номинальными ценовыми жесткостями à la Кальво. Это означает, что фирмы с вероятностью  $\phi^i$  сталкиваются с невозможностью изменить цены,  $i \in \{HD, HF\}$ ,  $HD$  – отечественные товары, продаваемые внутри страны,  $HF$  – отечественные товары, продаваемые за границу.

Если фирма не может оптимизировать свою цену в периоде  $t$ , то она устанавливает ее в соответствии со следующим правилом:

$$P_t^i(f) = (\Pi_{t-1}^i)^{\gamma_i} P_{t-1}^i(f),$$

$$\text{где } i \in \{HD, HF\}, \Pi_t^i \equiv \frac{P_t^i}{P_{t-1}^i},$$

$\Pi^i$  – равновесное значение инфляции,  $\gamma_i$  – индексация цен и  $0 \leq \gamma_i < 1$ .

Если фирма может пересмотреть свою цену на отечественные товары, продаваемые внутри страны в период  $t$ , то она выбирает ее исходя из условия максимизации прибыли:

$$\mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HD}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HD} P_{t,t+s}^{HD*}(f)}{P_{t+s}} Y_{t,t+s}^{HD} - \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \frac{Y_{t,t+s}^{HD}}{Z_{t,t+s}} \right),$$

где  $\Lambda_t$  – предельная полезность потребителей и  $Y_{t,t+s}^i(f)$  – спрос на продукцию монополиста, зафиксировавшего цену в период  $t$ , в период  $t+s$ , который имеет вид:

$$Y_{t,t+s}^i(f) = \left( \frac{V_{t,t+s}^i P_{t,t+s}^{i*}}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon_i} Y_{t+s}^i,$$

где  $V_t^i$  – кумулятивный эффект индексации цен на инфляцию предыдущих периодов:

$$V_{t,t+s}^i = \prod_{j=t}^{t+s-1} (\Pi_j^i)^{\gamma_i}.$$

Условие первого порядка для этой задачи имеет вид:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HD}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{(V_{t,t+s}^{HD} P_{t,t+s}^{HD*}(f))^{1-\theta^{HD}}}{P_{t+s}} \left( \frac{1}{P_{t+s}^{HD}} \right)^{-\theta^{HD}} Y_{t,t+s}^{HD} - \frac{\theta^{HD}}{\theta^{HD}-1} \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HD} P_{t,t+s}^{HD*}(f)}{P_{t+s}^{HD}} \right)^{-\theta^{HD}} \frac{Y_{t,t+s}^{HD}}{Z_{t,t+s}} \right) = 0.$$

Преобразовывая, получаем:



$$\frac{P_t^{HD*}(f) P_t}{P_t} \frac{P_t}{P_t^{HD}} = \frac{\theta^{HD}}{\theta^{HD} - 1} \frac{K_t^{HD}}{F_t^{HD}},$$

где

$$K_t^{HD} = \Lambda_{z,t} \frac{W_{z,t}}{P_t} Y_{z,t}^{HD} + \beta \phi^{HD} \mathbb{E}_t \left( \frac{(\Pi_t^{HD})^{\gamma^{HD}}}{\Pi_{t+1}^{HD}} \right)^{-\theta^{HD}} K_{t+1}^{HD},$$

$$F_t^{HD} = \Lambda_{z,t} Y_{z,t}^{HD} + \beta \phi^{HD} \mathbb{E}_t \left( \frac{1}{\Pi_{t+1}^{HD}} \right)^{-\theta^{HD}} \frac{1}{\Pi_{t+1}^{HD}} \left( (\Pi_t^{HD})^{\gamma^{HD}} \right)^{1-\theta^{HD}} \frac{P_t^{HD}}{P_t} F_{t+1}^{HD},$$

$$\Pi_t^{HD} \equiv \frac{P_t^{HD}}{P_{t-1}^{HD}}, \Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Кроме того, преобразуя

$$P_t^{HD^{1-\theta^{HD}}} = \int_0^1 P_t^{HD}(f)^{1-\theta^{HD}} df = (1 - \phi^{HD}) * P_t^{HD*^{1-\theta^{HD}}} + \int_0^1 \left( \Pi_{t-1}^{HD} \gamma^{HD} P_{t-1}^{HD}(f) \right)^{1-\theta^{HD}} df,$$

получаем, что

$$\left( \frac{P_t^{HD*}}{P_t} \right)^{1-\theta^{HD}} \left( \frac{P_t}{P_t^{HD}} \right)^{1-\theta^{HD}} = \frac{1 - \phi^{HD} \left( \frac{\Pi_{t-1}^{HD} \gamma^{HD}}{\Pi_t^{HD}} \right)^{1-\theta^{HD}}}{1 - \phi^{HD}}.$$

Аналогично выбирается цена для отечественных товаров, продаваемых за границей:

$$\mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HF}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HF} P_t^{HF*}(f)}{P_{t+s}} Y_{t+s}^{HF} - \frac{1}{\varepsilon_{t+s}} \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \frac{Y_{t+s}^{HF}}{Z_{t+s}} \right).$$

Условие первого порядка для этой задачи имеет вид:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^{HF}) \Lambda_{t+s} \left( \frac{(V_{t,t+s}^{HD} P_t^{HF*}(f))^{1-\theta^{HF}}}{P_{t+s}} \left( \frac{1}{P_{t+s}^{HF}} \right)^{-\theta^{HD}} Y_{t+s}^{HF} - \frac{\theta^{HF}}{\theta^{HF} - 1} \frac{1}{\varepsilon_{t+s}} \frac{W_{t+s}}{P_{t+s}} \left( \frac{V_{t,t+s}^{HF} P_t^{HF*}(f)}{P_{t+s}} \right)^{-\theta^{HF}} \frac{Y_{t+s}^{HF}}{Z_{t+s}} \right) = 0.$$

Преобразовывая, получаем

$$\frac{P_t^{HF*}(f) P_t}{P_t} \frac{P_t}{P_t^{HF}} = \frac{\theta^{HF}}{\theta^{HF} - 1} \frac{K_t^{HF}}{F_t^{HF}},$$

где

$$K_t^{HF} = \Lambda_{z,t} \frac{1}{\varepsilon_{t+s}} \frac{W_{z,t}}{P_t} Y_{z,t}^{HF} + \beta \phi^F \mathbb{E}_t \left( \frac{(\Pi_t^{HF})^{\gamma^{HF}}}{\Pi_{t+1}^{HF}} \right)^{-\theta^{HF}} K_{t+1}^{HF},$$

$$F_t^{HF} = \Lambda_{z,t} Y_{z,t}^{HF} + \beta \phi^{HF} \mathbb{E}_t \left( \frac{1}{\Pi_{t+1}^{HF}} \right)^{-\theta^{HF}} \frac{P_t^{HF}}{P_t} \left( (\Pi_t^{HF})^{\gamma^{HF}} \right)^{1-\theta^{HF}} F_{t+1}^{HF},$$

где  $\Pi_t^{HF} \equiv \frac{P_t^{HF}}{P_{t-1}^{HF}}.$

Преобразуя

$$P_t^{HF^{1-\theta^{HF}}} = \int_0^1 P_t^{HF}(f)^{1-\theta^{HF}} df = (1 - \phi^{HF}) * P_t^{HF*^{1-\theta^{HF}}} + \int_0^1 \left( \Pi_{t-1}^{HF} \gamma^{HF} P_{t-1}^{HF}(f) \right)^{1-\theta^{HF}} df,$$

получаем, что

$$\left( \frac{P_t^{HF*}}{P_t} \right)^{1-\theta^{HF}} \left( \frac{P_t}{P_t^{HF}} \right)^{1-\theta^{HF}} = \frac{1 - \phi^{HF} \left( \frac{\Pi_{t-1}^{HF} \gamma^{HF}}{\Pi_t^{HF}} \right)^{1-\theta^{HF}}}{1 - \phi^{HF}}.$$

### Производители промежуточных импортных товаров

Промежуточные товары производятся фирмами в условиях монополистической конкуренции из иностранных товаров.

Так же как и отечественные, иностранные товары производятся с номинальными ценовыми жесткостями à la Кальво. Это означает, что фирмы с вероятностью  $\phi^F$  сталкиваются с невозможностью изменить цены.

Если фирма может пересмотреть свою цену на отечественные товары, продаваемые внутри страны в период  $t$ , то она выбирает ее исходя из условия максимизации прибыли:

$$\mathbb{E} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^F) \Lambda_{t+s} \left( \frac{V_{t,t+s}^F P_t^{F*}}{P_{t+s}} Y_{t,t+s}^F - \varepsilon_{t+s} \frac{P_t^{For} Y_{t,t+s}^F}{P_{t+s} Z_{t,t+s}} \right),$$

где  $P_t^{For}$  – цена на промежуточные товары за границей,  $P_t^{F*}$  – оптимальная цена импортеров.

Если фирма не может оптимизировать свою цену в периоде  $t$ , то она устанавливает ее в соответствии со следующим правилом:

$$P_t^F(f) = (\Pi_{t-1}^F)^{\gamma^F} P_{t-1}^F(f),$$

$$\Pi_t^F \equiv \frac{P_t^F}{P_{t-1}^F}, \Pi^F - \text{равновесное значение, } 0 \leq \gamma^F < 1.$$

Так же как и в случае с производителями отечественных товаров, у импортеров индексация цен является неполной.

Условие первого порядка для этой задачи имеет вид:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\beta \phi^F) \Lambda_{t+s} \left( \frac{(V_{t,t+s}^F P_t^{F*}(f))^{1-\epsilon^F}}{P_{t+s}} \left( \frac{1}{P_{t+s}^F} \right)^{-\epsilon^F} Y_{t,t+s}^F - \frac{\epsilon^F}{\epsilon^F - 1} \varepsilon_{t+s} \frac{P_t^{For}}{P_{t+s}} \left( \frac{V_{t,t+s}^F P_t^{F*}(f)}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon^F} \frac{Y_{t,t+s}^F}{Z_{t,t+s}} \right) = 0.$$

Преобразовывая, получаем

$$\frac{P_t^{F*}(f) P_t}{P_t P_t^F} = \frac{\epsilon^F}{\epsilon^F - 1} \frac{K_t^F}{F_t^F},$$

где

$$K_t^F = \Lambda_{z,t} Y_{z,t}^F + \beta \phi^F \mathbb{E}_t \left( \frac{(\Pi_{t+1}^F)^{\gamma^F}}{\Pi_{t+1}^F} \right)^{-\epsilon^F} K_{t+1}^F,$$

$$F_t^F = \Lambda_{z,t} \varepsilon_t \frac{P_t^{F \text{ or}}}{P_t} Y_{z,t}^F + \beta \phi^F \mathbb{E}_t \left( \frac{1}{\Pi_{t+1}^F} \right)^{-\varepsilon^F} \frac{P_t^F}{P_t} \left( (\Pi_t^F)^{\gamma^F} \right)^{1-\varepsilon^F} F_{t+1}^F,$$

$$\Pi_t^F \equiv \frac{P_t^F}{P_{t-1}^F}.$$

Преобразуя

$$P_t^{F1-\theta^F} = \int_0^1 P_t^F(f)^{1-\varepsilon^F} df = (1 - \phi^F) * P_t^{F*1-\varepsilon^F} + \int_0^1 \left( \Pi_{t-1}^F \gamma^F P_{t-1}^F(f) \right)^{1-\varepsilon^F} df,$$

получаем

$$\left( \frac{P_t^{F*}}{P_t} \right)^{1-\varepsilon^F} \left( \frac{P_t}{P_t^F} \right)^{1-\varepsilon^F} = \frac{1 - \phi^F \left( \frac{\Pi_{t-1}^F \gamma^F}{\Pi_t^F} \right)^{1-\varepsilon^F}}{1 - \phi^F}.$$

## II ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ

Прежде всего выведем несколько определений.

Определим отклонение от равновесного состояния в модели с жесткими ценами как:

$$\frac{x_t - X}{X} = \widehat{x}_t + \frac{1}{2} \widehat{x}_t^2 + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Определим отклонение от равновесного состояния в модели с гибкими ценами как:

$$\frac{x_t - X^n}{X^n} = \widetilde{x}_t + \frac{1}{2} \widetilde{x}_t^2 + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Два соотношения для дальнейшего использования. согласно разложению Тейлора:

$$g(x) = g(x^*) + \frac{g'(x^*)}{1!} (x - x^*) + \frac{g''(x^*)}{2!} (x - x^*)^2 + \dots \quad (\text{II.1})$$

Возьмем математическое ожидание левой и правой части:

$$E(g(x)) = E(g(x^*)) + E\left(\frac{g'(x^*)}{1!} (x - x^*)\right) + E\left(\frac{g''(x^*)}{2!} (x - x^*)^2\right) + \mathcal{O}(\|x\|^3).$$

Учитывая, что  $x^* = E(x)$  и  $E\left((x - E(x))^2\right) = V(x)$  по определению (где  $V(x)$  – дисперсия случайной величины), получаем, что

$$E(g(x)) = g(E(x)) + \frac{1}{2} g''(E(x)) V(x) + \mathcal{O}(\|x\|^3). \quad (\text{II.2})$$

Теперь возьмем дисперсию от обеих частей уравнения (II.1):

$$V(g(x)) = V(g(x^*)) + V\left(\frac{g'(x^*)}{1!}(x - x^*)\right) + V\left(\frac{g''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2\right) + \mathcal{O}(\|x\|^3).$$

Преобразуя, получаем

$$V(g(x)) = (g'(E(x)))^2 V(x) + \mathcal{O}(\|x\|^3). \quad (II.3)$$

Теперь перейдем непосредственно к функции потерь.

В качестве критерия выбора оптимального уровня цели по инфляции используется значение функции благосостояния. Эта функция представляет собой аппроксимацию (разложение Тейлора) второго порядка функции полезности потребителя и имеет вид:

$$\begin{aligned} & \log(C_t - \eta * C_{t-1} * e^{-\zeta_{z,t}}) - \frac{1}{1 + \sigma_L} * \int_0^1 (N_t(h))^{1+\sigma_L} dh = \\ & \frac{1}{1 - \eta} * \left[ \frac{C_t - C^n}{C^n} - \eta * \frac{C_{t-1} - C^n}{C^n} - \frac{1}{2} * \frac{1}{1 - \eta} * \left( \frac{C_t - C^n}{C^n} \right)^2 \right. \\ & \quad + \frac{\eta}{1 - \eta} * \left( \frac{C_t - C^n}{C^n} \right) * \left( \frac{C_{t-1} - C^n}{C^n} \right) - \frac{1}{2} * \frac{\eta^2}{1 - \eta} \\ & \quad * \left( \frac{C_{t-1} - C^n}{C^n} \right)^2 + \zeta_{c,t} * \frac{C_t - C^n}{C^n} - \eta * \zeta_{c,t} \\ & \quad * \frac{C_{t-1} - C^n}{C^n} - \frac{\eta}{1 - \eta} * \zeta_{z,t} * \frac{C_t - C^n}{C^n} + \frac{\eta}{1 - \eta} \\ & \quad \left. * \zeta_{z,t} * \left( \frac{C_{t-1} - C^n}{C^n} \right) \right] \quad \left. \vphantom{\log} \right\} \text{Потребление} \quad (II.4) \\ & - \int_0^1 \left( (N^n)^{1+\sigma_L} * \frac{N_t(h) - N^n}{N^n} + \frac{1}{2} * \sigma_L * (N^n)^{1+\sigma_L} \right. \\ & \quad \left. * \left( \frac{N_t(h) - N^n}{N^n} \right)^2 \right) dh \quad \left. \vphantom{\log} \right\} \text{Труд} \quad (II.5) \end{aligned}$$

где  $C$  – потребление,  $N$  – труд,  $C^n$  – естественный уровень потребления,

$N^n$  – естественный уровень труда,  $h$  – тип труда,  $\eta$  – привычки в потреблении,

$\zeta_c$  – шок потребления,  $\zeta_z$  – шок производительности,  $\sigma_L$  – эластичность труда по Фришу.

Сначала преобразим часть, связанную с потреблением. Учитывая, что

$$\frac{C_t - C^n}{C^n} = \frac{C_t - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1,$$

перепишем (4.2.1) как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \eta} * \left[ \frac{C_t - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 - \eta * \left( \frac{C_{t-1} - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) - \frac{1}{2} * \frac{1}{1 - \eta} * \left( \frac{C_t - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right)^2 \right. \\ & \quad + \frac{\eta}{1 - \eta} * \left( \frac{C_t - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) * \\ & \quad \left( \frac{C_{t-1} - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) - \frac{1}{2} * \frac{\eta^2}{1 - \eta} * \left( \frac{C_{t-1} - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right)^2 + \zeta_{c,t} * \left( \frac{C_t - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) - \\ & \quad \left. \eta * \zeta_{c,t} * \left( \frac{C_{t-1} - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) + \frac{\eta}{1 - \eta} * \zeta_{z,t} * \left( \frac{C_t - C}{C} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя

$$\frac{C_t - C}{C} = \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

перепишем как

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-\eta} * \left[ \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) \frac{C}{C^n} - \eta * \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) \frac{C}{C^n} - \frac{1}{2} * \frac{1}{1-\eta} \right. \\
& * \left( \hat{c}_t^2 \left( \frac{C}{C^n} \right)^2 + 2 \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) \frac{C}{C^n} * \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \right) + \frac{\eta}{1-\eta} \\
& * \left( \frac{C^2}{C^n} \hat{c}_t \hat{c}_{t-1} + \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) + \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \left( \hat{c}_{t-1} + \frac{1}{2} \hat{c}_{t-1}^2 \right) \right) - \frac{1}{2} * \frac{\eta^2}{1-\eta} \\
& * \left( \hat{c}_{t-1}^2 \left( \frac{C}{C^n} \right)^2 + 2 \left( \hat{c}_{t-1} + \frac{1}{2} \hat{c}_{t-1}^2 \right) \frac{C}{C^n} \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \right) + \zeta_{c,t} * \left( \hat{c}_t \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) - \eta \\
& * \zeta_{c,t} * \left( \hat{c}_{t-1} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) - \frac{\eta}{1-\eta} * \zeta_{z,t} * \left( \hat{c}_t \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) + \frac{\eta}{1-\eta} * \zeta_{z,t} \\
& * \left. \left( \hat{c}_{t-1} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) \right] + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),
\end{aligned} \tag{II.6}$$

где н.п.у. – не зависящие от политики условия.

Теперь преобразуем часть, связанную с трудом.

Учитывая, что

$$\frac{N_t - N^n}{N^n} = \frac{N_t - N}{N} \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - 1,$$

преобразуем (4.2.2):

$$\int_0^1 \left( (N^n)^{1+\sigma_L} * \left( \frac{N_t(h) - N}{N} \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - 1 \right) + \frac{1}{2} * \sigma_L * (N^n)^{1+\sigma_L} * \left( \frac{N_t(h) - N}{N} \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - 1 \right)^2 \right) dh.$$

Используя

$$\frac{N_t - N}{N} = \hat{n}_t + \frac{1}{2} \hat{n}_t^2 + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3)$$

подынтегральное выражение имеет вид:

$$\frac{1}{1+\sigma_L} (N_t(h))^{1+\sigma_L} = (N^n)^{1+\sigma_L} * \left( \hat{n}_t \frac{N}{N^n} \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) \right) + \hat{n}_t^2 \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \right) + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Интегрируя по видам труда:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+\sigma_L} \int_0^1 (N_t(h))^{1+\sigma_L} dh \\
& = (N^n)^{1+\sigma_L} \left[ \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) \frac{N}{N^n} \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) \right) + \mathbb{E}_h(\hat{n}_t^2(h)) \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \right] \\
& + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).
\end{aligned}$$

Так как дисперсия может быть записана как

$$\mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) = \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)^2) - \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h))^2,$$

то

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 + \sigma_L} \int_0^1 (N_t(h))^{1 + \sigma_L} dh \\
&= (N^n)^{1 + \sigma_L} \left[ \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) \frac{N}{N^n} \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) \right) + \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. * (\mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) + \mathbb{E}_h \hat{n}_t(h)^2) \right] + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).
\end{aligned} \tag{II.7}$$

### Агрегирование труда и выпуска

Прологарифмируем (2.5.1) и получим:

$$\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} \hat{n}_t = \log \left( \int_0^1 \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right)^{\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L}} dh \right).$$

Используя (II.2), преобразуем как

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} \mathbb{E}_h \left( \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right)^{\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L}} \right)^{-2} \mathbb{V}_h \left( \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right)^{\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L}} \right) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \tag{II.8}$$

Используя свойство логарифма:

$$\mathbb{V}_h \left( \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right)^{\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L}} \right) = \mathbb{V}_h \left( \exp \left( (1 - \epsilon_L^{-1}) \log \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right) \right) \right).$$

Тогда, используя (II.3), преобразуем это как

$$\mathbb{V}_h \left( \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right)^{\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L}} \right) = (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \exp \left( (1 - \epsilon_L^{-1}) \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) \right)^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Снова используя свойство логарифма

$$\mathbb{E}_h \left( \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right)^{\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L}} \right) = \mathbb{E}_h \left( \exp \left( (1 - \epsilon_L^{-1}) \hat{n}_t(h) \right) \right)$$

и используя (II.3), преобразуем это как

$$\mathbb{E}_h \left( \left( \frac{N_t(h)}{N^n} \right)^{\frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L}} \right) = \exp \left( (1 - \epsilon_L^{-1}) \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) \right) \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) \right) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Тогда (II.8) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\hat{n}_t &= \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} \left( \exp \left( (1 - \epsilon_L^{-1}) \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) \right) \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) \right) \right)^{-2} \\
&\quad - \epsilon_L^{-1})^2 \exp \left( (1 - \epsilon_L^{-1}) \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) \right)^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3) \\
&= \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} \left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) \right) \right)^{-2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3) \\
&= \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h))}{\left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) \right) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3)
\end{aligned}$$

Обозначим  $\mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) \equiv \Delta_{h,t}$ , тогда (II.8):

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} \Delta_{h,t}}{\left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_{h,t} \right) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_L - 1}{\epsilon_L} \Delta_{h,t}}{\left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_{h,t} \right) \right)^2} &= \frac{\frac{1 - \epsilon_L^{-1}}{2} \Delta_n}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_n \right)^2} + \\
&\quad + \frac{1 - \epsilon_L^{-1}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_n}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_n \right)^3} (\Delta_{h,t} - \Delta_n).
\end{aligned}$$

Тогда в итоге получаем

$$\begin{aligned}
\hat{n}_t &= \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{\frac{1 - \epsilon_L^{-1}}{2} \Delta_n}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_n \right)^2} + \\
&\quad + \frac{1 - \epsilon_L^{-1}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_n}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_L^{-1})^2 \Delta_n \right)^3} (\Delta_{h,t} - \Delta_n) \\
&\quad + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).
\end{aligned} \tag{II.9}$$

Аналогично для выпуска:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t^{HD} &= \mathbb{E}_f(\hat{y}_t^{HD}(f)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_{HD}}{\epsilon_{HD} - 1} \Delta_{y^{HD},t}}{\left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y^{HD},t} \right) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3) \\
\hat{y}_t^{HF} &= \mathbb{E}_f(\hat{y}_t^{HF}(f)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_{HF}}{\epsilon_{HF} - 1} \Delta_{y^{HF},t}}{\left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y^{HF},t} \right) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).
\end{aligned}$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_{HD} - 1}{\epsilon_{HD}} \Delta_{y,t}}{\left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y,t} \right) \right)^2} = \frac{\frac{1 - \epsilon_{HD}^{-1}}{2} \Delta_{y,HD}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y,HD} \right)^2} + \\
& + \frac{1 - \epsilon_{HD}^{-1}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y,HD}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y,HD} \right)^3} (\Delta_{y,HD,t} - \Delta_{y,HD}) \\
& \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_{HF} - 1}{\epsilon_{HF}} \Delta_{y,HF,t}}{\left( \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y,HF,t} \right) \right)^2} = \frac{\frac{1 - \epsilon_{HF}^{-1}}{2} \Delta_{y,HF}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y,HF} \right)^2} + \\
& + \frac{1 - \epsilon_{HF}^{-1}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y,HF}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y,HF} \right)^3} (\Delta_{y,HF,t} - \Delta_{y,HF}).
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $\widehat{y}_t = \widehat{y}_t^{HD} + \widehat{y}_t^{HF}$ , и то, что  $\mathbb{E}_f(\widehat{y}_t^{HD} + \widehat{y}_t^{HF}) = \mathbb{E}_f(\widehat{y}_t^{HD}) + \mathbb{E}_f(\widehat{y}_t^{HF}) = \mathbb{E}_f(\widehat{y}_t(f))$ ,

получаем, что

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y}_t(f)) & + \frac{\frac{1 - \epsilon_{HD}^{-1}}{2} \Delta_{y,HD}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y,HD} \right)^2} + \frac{1 - \epsilon_{HD}^{-1}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y,HD}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HD}^{-1})^2 \Delta_{y,HD} \right)^3} (\Delta_{y,HD,t} \\
& - \Delta_{y,HD}) + \frac{\frac{1 - \epsilon_{HF}^{-1}}{2} \Delta_{y,HF}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y,HF} \right)^2} \\
& + \frac{1 - \epsilon_{HF}^{-1}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y,HF}}{\left( 1 + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{HF}^{-1})^2 \Delta_{y,HF} \right)^3} (\Delta_{y,HF,t} - \Delta_{y,HF}) \\
& + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).
\end{aligned} \tag{II.10}$$

Теперь обратим внимание, что из (2.5.2) следует, что

$$\frac{N_t}{N} = \int_0^1 \frac{Y_{HD,t}^{HD}(f)}{Y_{HD,t}^{HD}} df + \int_0^1 \frac{Y_{HF,t}^{HF}(f)}{Y_{HF,t}^{HF}} df.$$

Учитывая это, прологарифмируем (2.5.2) и получим

$$\widehat{n}_t = \log \left( \int_0^1 \frac{Y_{HD,t}^{HD}(f)}{Y_{HD,t}^{HD}} df + \int_0^1 \frac{Y_{HF,t}^{HF}(f)}{Y_{HF,t}^{HF}} df \right) = \log \left( \mathbb{E}_f \left( \frac{Y_{HD,t}^{HD}(f)}{Y_{HD,t}^{HD}} \right) + \mathbb{E}_f \left( \frac{Y_{HF,t}^{HF}(f)}{Y_{HF,t}^{HF}} \right) \right).$$

Используя (II.2) и (II.3) получаем, что

$$\widehat{n}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y}_t(f)) + \frac{\frac{1}{2} \mathbb{V}_f \left( \frac{Y_{HD,t}^{HD}(f)}{Y_{HD,t}^{HD}} \right)}{\left( \mathbb{E}_f \left( \frac{Y_{HD,t}^{HD}(f)}{Y_{HD,t}^{HD}} \right) \right)^2} + \frac{\frac{1}{2} \mathbb{V}_f \left( \frac{Y_{HF,t}^{HF}(f)}{Y_{HF,t}^{HF}} \right)}{\left( \mathbb{E}_f \left( \frac{Y_{HF,t}^{HF}(f)}{Y_{HF,t}^{HF}} \right) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$



$$\mathbb{V}_f \left( \frac{Y_t^{HD}(f)}{Y_t^{HD}} \right) = \exp \left( \mathbb{E}_f(\hat{y}_t^{HD}(f)) \right)^2 \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HD}(f)) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$\mathbb{V}_f \left( \frac{Y_t^{HF}(f)}{Y_t^{HF}} \right) = \exp \left( \mathbb{E}_f(\hat{y}_t^{HF}(f)) \right)^2 \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HF}(f)) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$\mathbb{E}_h \left( \frac{Y_t^{HD}(f)}{Y_t^{HD}} \right) = \exp \left( \mathbb{E}_h(\hat{y}_t^{HD}(f)) \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HD}(f)) \right) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$\mathbb{E}_h \left( \frac{Y_t^{HF}(f)}{Y_t^{HF}} \right) = \exp \left( \mathbb{E}_h(\hat{y}_t^{HF}(f)) \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HF}(f)) \right) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Тогда

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y}_{h_t}(f)) + \frac{\frac{1}{2} \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HD}(f))}{\left( 1 + \frac{1}{2} \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HD}(f)) \right)^2} + \frac{\frac{1}{2} \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HF}(f))}{\left( 1 + \frac{1}{2} \mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HF}(f)) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Определим  $\mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HD}(f)) \equiv \Delta_{y^{HD},t}$  и  $\mathbb{V}_f(\hat{y}_t^{HF}(f)) \equiv \Delta_{y^{HF},t}$ ,

тогда

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y}_{h_t}(f)) + \frac{\frac{1}{2} \Delta_{y^{HD},t}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD},t} \right)^2} + \frac{\frac{1}{2} \Delta_{y^{HF},t}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF},t} \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\frac{\Delta_{y^{HD},t}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD},t} \right)^2} = \frac{\Delta_{y^{HD}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD}} \right)^2} + \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD}} \right)^3} (\Delta_{y^{HD},t} - \Delta_{y^{HD}}),$$

$$\frac{\Delta_{y^{HF},t}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF},t} \right)^2} = \frac{\Delta_{y^{HF}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF}} \right)^2} + \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF}} \right)^3} (\Delta_{y^{HF},t} - \Delta_{y^{HF}}).$$

Тогда в итоге получаем

$$\begin{aligned} \hat{n}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y}_{h_t}(f)) &+ \frac{\Delta_{y^{HD}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD}} \right)^2} + \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HD}} \right)^3} (\Delta_{y^{HD},t} - \Delta_{y^{HD}}), \\ &+ \frac{\Delta_{y^{HF}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF}} \right)^2} + \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF}}}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_{y^{HF}} \right)^3} (\Delta_{y^{HF},t} - \Delta_{y^{HF}}) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \end{aligned} \quad (II.11)$$

### Агрегирование цен и зарплат

Напомним уравнения для уровня цен и зарплат из раздела 2:

$$P_t^{HD} = \left( \int_0^1 P_t^{HD}(f)^{\epsilon_{HD}-1} df \right)^{\frac{1}{\epsilon_{HD}-1}}, \quad (2.2.2)$$

$$P_t^{HF} = \left( \int_0^1 P_t^{HF}(f)^{\epsilon_{HF}-1} df \right)^{\frac{1}{\epsilon_{HF}-1}}, \quad (2.2.2)$$

$$W_t = \left( \int_0^1 W_t(h)^{1-\epsilon_L} dh \right)^{1/(1-\epsilon_L)}. \quad (2.5.3)$$

Тогда, используя (II.2), перепишем это как

$$p_t^{HD} = \mathbb{E}_f(p_t^{HD}(f)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{1-\epsilon_{HD}} \mathbb{V}_f(P_t^{HD}(f)^{1-\epsilon_{HD}})}{\left( \mathbb{E}_f(P_t^{HD}(f)^{\epsilon_{HD}-1}) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$p_t^{HF} = \mathbb{E}_f(p_t^{HF}(f)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{1-\epsilon_{HF}} \mathbb{V}_f(P_t^{HF}(f)^{1-\epsilon_{HF}})}{\left( \mathbb{E}_f(P_t^{HF}(f)^{\epsilon_{HF}-1}) \right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$w_t = \mathbb{E}_h(w_t(h)) + \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{1-\epsilon_L} \mathbb{V}_f(W_t(h)^{1-\epsilon_L})}{\left( \mathbb{E}_h(W_t(h)^{1-\epsilon_L}) \right)^2}.$$

Используя (II.3), получим что

$$\mathbb{V}_f(P_t^{HD}(f)^{1-\epsilon_{HD}}) = \mathbb{V}_f\left(\exp((1-\epsilon_{HD})p_t^{HD}(f))\right) = (1-\epsilon_{HD})^2 \exp\left((1-\epsilon_{HD})\mathbb{E}_f(p_t^{HD}(f))\right)^2 \mathbb{V}_f(p_t^{HD}(f)),$$

$$\mathbb{V}_f(P_t^{HF}(f)^{1-\epsilon_{HF}}) = \mathbb{V}_f\left(\exp((1-\epsilon_{HF})p_t^{HF}(f))\right) = (1-\epsilon_{HF})^2 \exp\left((1-\epsilon_{HF})\mathbb{E}_f(p_t^{HF}(f))\right)^2 \mathbb{V}_f(p_t^{HF}(f)),$$

$$\mathbb{V}_h(W_t(h)^{1-\epsilon_L}) = \mathbb{V}_h\left(\exp((1-\epsilon_L)w_t(h))\right) = (1-\epsilon_L)^2 \exp\left((1-\epsilon_L)\mathbb{E}_h(w_t(h))\right)^2 \mathbb{V}_h(w_t(h)).$$

Определим:

$$\bar{p}_t^{HD} = \mathbb{E}_f(p_t^{HD}(f)), \bar{p}_t^{HF} = \mathbb{E}_f(p_t^{HF}(f)), \bar{w}_t = \mathbb{E}_h(w_t(h)),$$

$$\Delta_{p^{HD},t} = \mathbb{V}_f(p_t^{HD}(f)), \Delta_{p^{HF},t} = \mathbb{V}_f(p_t^{HF}(f)), \Delta_{w,t} = \mathbb{V}_h(w_t(h)).$$

Тогда

$$\mathbb{V}_f(P_t^{HD}(f)^{1-\epsilon_{HD}}) = (1-\epsilon_{HD})^2 \exp((1-\epsilon_{HD})\bar{p}_t^{HD})^2 \Delta_{p^{HD},t},$$

$$\mathbb{V}_f(P_t^{HF}(f)^{1-\epsilon_{HF}}) = (1-\epsilon_{HF})^2 \exp((1-\epsilon_{HF})\bar{p}_t^{HF})^2 \Delta_{p^{HF},t},$$

$$\mathbb{V}_h(W_t(h)^{1-\epsilon_L}) = (1-\epsilon_L)^2 \exp((1-\epsilon_L)\bar{w}_t)^2 \Delta_{w,t}.$$

Используя (II.2), получим

$$\mathbb{E}_f(P_t^{HD}(f)^{1-\epsilon_{HD}}) = \mathbb{E}_f(\exp((1-\epsilon_{HD})p_t^{HD}(f))) = \exp((1-\epsilon_{HD})\bar{p}_t^{HD}) \left( 1 + \frac{1}{2} (1-\epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD},t} \right) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$\mathbb{E}_f(P_t^{HF}(f)^{1-\epsilon_{HF}}) = \mathbb{E}_f(\exp((1-\epsilon_{HF})p_t^{HF}(f))) = \exp((1-\epsilon_{HF})\bar{p}_t^{HF}) \left( 1 + \frac{1}{2} (1-\epsilon_{HF})^2 \Delta_{p^{HF},t} \right) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$\mathbb{E}_h(W_t(h)^{1-\epsilon_L}) = \mathbb{E}_h(\exp((1-\epsilon_L)w_t(h))) = \exp((1-\epsilon_L)\bar{w}_t) \left( 1 + \frac{1}{2} (1-\epsilon_L)^2 \Delta_{w,t} \right) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Тогда в итоге получаем

$$p_t^{HD} = \bar{p}_t^{HD} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})\Delta_{p^{HD},t}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD},t}\right)^2},$$

$$p_t^{HF} = \bar{p}_t^{HF} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})\Delta_{p^{HF},t}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2\Delta_{p^{HF},t}\right)^2},$$

$$w_t = \bar{w}_t + \frac{\frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)\Delta_{w,t}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2\Delta_{w,t}\right)^2} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})\Delta_{p^{HD},t}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD},t}\right)^2} &= \frac{\frac{1 - \epsilon_{HD}}{2}\Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD}}\right)^2} + \\ &+ \frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD}}\right)^3} (\Delta_{p^{HD},t} - \Delta_{p^{HD}}), \\ \frac{\frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})\Delta_{p^{HF},t}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2\Delta_{p^{HF},t}\right)^2} &= \frac{\frac{1 - \epsilon_{HF}}{2}\Delta_{p^{HF}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2\Delta_{p^{HF}}\right)^2} + \\ &+ \frac{1 - \epsilon_{HF}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2\Delta_{p^{HF}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2\Delta_{p^{HF}}\right)^3} (\Delta_{p^{HF},t} - \Delta_{p^{HF}}), \\ \frac{\frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)\Delta_{w,t}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2\Delta_{w,t}\right)^2} &= \frac{\frac{1 - \epsilon_L}{2}\Delta_w}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2\Delta_w\right)^2} + \\ &+ \frac{1 - \epsilon_L}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2\Delta_w}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2\Delta_w\right)^3} (\Delta_{w,t} - \Delta_w). \end{aligned}$$

Тогда в итоге для зарплат и цен получаем

$$\begin{aligned} p_t^{HD} &= \bar{p}_t^{HD} + \frac{\frac{1 - \epsilon_{HD}}{2}\Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD}}\right)^2} + \\ &+ \frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2\Delta_{p^{HD}}\right)^3} (\Delta_{p^{HD},t} - \Delta_{p^{HD}}) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \end{aligned} \tag{II.12}$$

$$p_t^{HF} = \bar{p}_t^{HF} + \frac{\frac{1 - \epsilon_{HF}}{2} \Delta_{p^{HF}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2 \Delta_{p^{HF}}\right)^2} + \frac{1 - \epsilon_{HF}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2 \Delta_{p^{HF}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HF})^2 \Delta_{p^{HF}}\right)^3} (\Delta_{p^{HF},t} - \Delta_{p^{HF}}) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \quad (II.13)$$

$$w_t = \bar{w}_t + \frac{\frac{1 - \epsilon_L}{2} \Delta_w}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2 \Delta_w\right)^2} + \frac{1 - \epsilon_L}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2 \Delta_w}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2 \Delta_w\right)^3} (\Delta_{w,t} - \Delta_w) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \quad (II.14)$$

Логлинеаризуем функции спроса:

$$\hat{y}^{HD}(f) = -\epsilon_{HD}(p_t^{HD}(f) - p_t^{HD}) + \hat{y}^{HD}_t,$$

$$\hat{y}^{HF}(f) = -\epsilon_{HF}(p_t^{HF}(f) - p_t^{HF}) + \hat{y}^{HF}_t,$$

$$\tilde{n}_t(h) = -\epsilon_L(w_t(h) - w_t) + \tilde{n}_t.$$

Возьмем дисперсию от обеих частей и в итоге получим

$$\Delta_{y^{HD},t} = \epsilon_{HD}^2 \Delta_{p^{HD},t}, \quad (II.15)$$

$$\Delta_{y^{HF},t} = \epsilon_{HF}^2 \Delta_{p^{HF},t}, \quad (II.16)$$

$$\Delta_{l,t} = \epsilon_L^2 \Delta_{w,t}. \quad (II.17)$$

### Ценовая и зарплатная дисперсии

Для удобства запишем дисперсию как

$$\Delta_{p^{HD},t} = \mathbb{V}_f(p_t^{HD}(f) - \bar{p}_{t-1}^{HD}),$$

$$\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD} = \phi_{HD} \gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD} + (1 - \phi_{HD})(p^{*HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD}).$$

Стандартная формула для дисперсии имеет вид:

$$\Delta_{p^{HD},t} = \mathbb{E}_f((p_t^{HD}(f) - \bar{p}_{t-1}^{HD})^2) - \left(\mathbb{E}_f(p_t^{HD}(f) - \bar{p}_{t-1}^{HD})\right)^2.$$

Используя это, получаем, что

$$\Delta_{p^{HD},t} = \mathbb{E}_f((p_{t-1}^{HD}(f) - \bar{p}_{t-1}^{HD} + \gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD})^2) + (1 - \phi_{HD})(p^{*HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD})^2 - (\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD})^2. \quad (II.18)$$

Так как

$$\begin{aligned} & (1 - \phi_{HD})(p^{*HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD})^2 - (\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD})^2 \\ &= (1 - \phi_{HD}) \left( \frac{1}{1 - \phi_{HD}} (\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD}) - \frac{\phi_{HD}}{1 - \phi_{HD}} \gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD} \right)^2 - (\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD})^2 \\ &= \frac{\phi_{HD}}{1 - \phi_{HD}} (\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD} - \gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD})^2 - \phi_{HD} (\gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD})^2 \end{aligned}$$

и

$$\phi_{HD} \mathbb{E}_f((p_{t-1}^{HD}(f) - \bar{p}_{t-1}^{HD} + \gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD})^2) = \phi_{HD} \mathbb{E}_f((p_{t-1}^{HD}(f) - \bar{p}_{t-1}^{HD} + \gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD})^2) - \phi_{HD} (\gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD})^2,$$

то (II.18) перепишется как

$$\Delta_{p^{HD},t} = \phi_{HD} \mathbb{E}_f((p_{t-1}^{HD}(f) - \bar{p}_{t-1}^{HD})^2) + \frac{\phi_{HD}}{1 - \phi_{HD}} (\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD} - \gamma_{HD} \pi_t^{HD})^2 =$$

$$\Delta_{p^{HD},t} = \phi_{HD} \Delta_{p^{HD},t-1} + \frac{\phi_{HD}}{1 - \phi_{HD}} (\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD} - \gamma_{HD} \pi_t^{HD})^2.$$

Из

$$p_t^{HD} = \bar{p}_t^{HD} + \frac{\frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}\right)^3} (\Delta_{p^{HD},t} - \Delta_{p^{HD}}) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3)$$

следует, что

$$\bar{p}_t^{HD} - \bar{p}_{t-1}^{HD} = \pi_t^{HD} - \frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}\right)^3} (\Delta_{p^{HD},t} - \Delta_{p^{HD},t-1}) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3),$$

$$\Delta_{p^{HD},t} = \phi_{HD} \Delta_{p^{HD},t-1} + \frac{\phi_{HD}}{1 - \phi_{HD}} \left[ \pi_t^{HD} - \frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}\right)^3} (\Delta_{p^{HD},t} - \Delta_{p^{HD},t-1}) - \gamma_{HD} \pi_{t-1}^{HD} \right]^2$$

$$+ \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Тогда равновесное значение дисперсии равно

$$\Delta_{p^{HD}} = \frac{(1 - \gamma_{HD})^2 \phi_{HD}}{(1 - \phi_{HD})^2} (\pi^{HD})^2,$$

$$\Delta_{p^{HD},t} = \phi_{HD} \Delta_{p^{HD},t-1},$$

$$+ \frac{\phi_{HD}}{1 - \phi_{HD}} \left[ (1 - \gamma_{HD}) \pi^{HD} + \hat{\pi}_t^{HD} - \gamma_{HD} \hat{\pi}_{t-1}^{HD} - \frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_{HD})^2 \Delta_{p^{HD}}\right)^3} (\hat{\pi}_t^{HD} - \hat{\pi}_{t-1}^{HD}) \right]^2$$

$$+ \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Аналогично

$$\Delta_{w,t} = \alpha_w \Delta_{w,t-1} + \frac{\alpha_w}{1 - \alpha_w} \left[ (1 - \gamma_z) \mu_z + (1 - \gamma_w) \pi + \hat{\pi}_t - \gamma_w \hat{\pi}_{t-1} - \frac{1 - \epsilon_L}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2 \Delta_{p^w}}{\left(1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_L)^2 \Delta_{p^w}\right)^3} (\Delta_{p^w,t} - \Delta_{p^w,t-1}) \right]^2$$

$$+ \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).$$

Учитывая, что стационарное состояние  $\Delta_{p,HD}$  имеет второй порядок, то выведенные ранее выражения можно упростить:

$$p_t^{HD} = \bar{p}_t^{HD} + \frac{1 - \epsilon_{HD}}{2} \Delta_{p,HD,t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \quad (II.12)$$

$$p_t^{HF} = \bar{p}_t^{HF} + \frac{1 - \epsilon_{HF}}{2} \Delta_{p,HF,t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \quad (II.13)$$

$$w_t = \bar{w}_t + \frac{1 - \epsilon_L}{2} \Delta_{w,t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \quad (II.14)$$

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{1 - \epsilon_L^{-1}}{2} \Delta_{n,t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \quad (II.19)$$

$$\widehat{y}h_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y}h_t(f)) + \frac{1 - \epsilon_{HD}^{-1}}{2} \Delta_{y,HD,t} + \frac{1 - \epsilon_{HF}^{-1}}{2} \Delta_{y,HF,t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \quad (II.20)$$

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y}h_t(f)) + \frac{1}{2} (\Delta_{y,HD,t} + \Delta_{y,HF,t}) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \quad (II.21)$$

### Функция потерь

Преобразуем функцию потерь, приведенную в начале раздела. Сделаем это отдельно для части потребления и труда.

#### Труд

Напомним, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \sigma_L} \int_0^1 (N_t(h))^{1 + \sigma_L} dh \\ &= (N^n)^{1 + \sigma_L} \left[ \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) \frac{N}{N^n} \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) \right) + \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. * (\mathbb{V}_h(\hat{n}_t(h)) + \mathbb{E}_h \hat{n}_t(h)^2) \right] + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \end{aligned} \quad (II.22)$$

Используя

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_h(\hat{n}_t(h)) + \frac{1 - \epsilon_L^{-1}}{2} \Delta_{w,t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \quad (II.19)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \sigma_L} \int_0^1 (N_t(h))^{1 + \sigma_L} dh \\ &= (N^n)^{1 + \sigma_L} \left[ \frac{N}{N^n} \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) \right) \hat{n}_t + \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \hat{n}_t^2 \right. \\ & \quad \left. + \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) + \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \right) * \Delta_{w,t} \right] + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3), \\ & (N^n)^{1 + \sigma_L} \left[ -\frac{1 - \epsilon_L^{-1}}{2 \epsilon_L} \Delta_{n,t} + \frac{1}{2} \Delta_{n,t} + \frac{1}{2} \sigma_L \Delta_{n,t} \right] + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \end{aligned}$$

Выразим  $\widehat{y\hat{h}}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y\hat{h}}_t(f))$

из

$$\widehat{y\hat{h}}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y\hat{h}}_t(f)) + \frac{1 - \epsilon_{HD}^{-1}}{2} \Delta_{y^{HD},t} + \frac{1 - \epsilon_{HF}^{-1}}{2} \Delta_{y^{HF},t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3) \quad (II.23)$$

и подставим это в

$$\hat{n}_t = \mathbb{E}_f(\widehat{y\hat{h}}_t(f)) + \frac{1}{2} (\Delta_{y^{HD},t} + \Delta_{y^{HF},t}) + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \quad (II.24)$$

Тогда получаем

$$\hat{n}_t = \widehat{y\hat{h}}_t + \frac{\epsilon_{HD}^{-1}}{2} \Delta_{y^{HD},t} + \frac{\epsilon_{HF}^{-1}}{2} \Delta_{y^{HF},t} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \quad (II.25)$$

Учитывая (II.25) и то, что  $\Delta_{y^{HD},t} = \epsilon_{HD}^2 \Delta_{p^{HD},t}$  (II.15),  $\Delta_{y^{HF},t} = \epsilon_{HF}^2 \Delta_{p^{HF},t}$  (II.16) и  $\Delta_{l,t} = \epsilon_L^2 \Delta_{w,t}$  (II.17), функция потерь для труда имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \sigma_L} \int_0^1 (N_t(h))^{1 + \sigma_L} dh \\ &= (N^n)^{1 + \sigma_L} \left[ \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) \right) \left( \widehat{y\hat{h}}_t + \frac{\epsilon_{HD}}{2} \Delta_{p^{HD},t} + \frac{\epsilon_{HF}}{2} \Delta_{p^{HF},t} \right) \right. \\ &+ \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \left( \widehat{y\hat{h}}_t + \frac{\epsilon_{HD}}{2} \Delta_{p^{HD},t} + \frac{\epsilon_{HF}}{2} \Delta_{p^{HF},t} \right)^2 \\ &\left. + \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) + \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \right) * \epsilon_L^2 \Delta_{w,t} \right] + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3). \end{aligned} \quad (II.26)$$

Объединяя (II.6) и (II.26), получаем итоговую функцию потерь:

$$\begin{aligned}
& \log(C_t - \eta * C_{t-1} * e^{-\zeta_{z,t}}) - \frac{1}{1 + \sigma_L} * \int_0^1 (N_t(h))^{1 + \sigma_L} dh \\
&= \frac{1}{1 - \eta} \\
& * \left[ \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) \frac{C}{C^n} - \eta * \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) \frac{C}{C^n} - \frac{1}{2} * \frac{1}{1 - \eta} \right. \\
& * \left( \hat{c}_t^2 \left( \frac{C}{C^n} \right)^2 + 2 \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) \frac{C}{C^n} * \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \right) + \frac{\eta}{1 - \eta} \\
& * \left( \frac{C^2}{C^n} \hat{c}_t \hat{c}_{t-1} + \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \left( \hat{c}_t + \frac{1}{2} \hat{c}_t^2 \right) + \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \left( \hat{c}_{t-1} + \frac{1}{2} \hat{c}_{t-1}^2 \right) \right) - \frac{1}{2} * \frac{\eta^2}{1 - \eta} \\
& * \left( \hat{c}_{t-1}^2 \left( \frac{C}{C^n} \right)^2 + 2 \left( \hat{c}_{t-1} + \frac{1}{2} \hat{c}_{t-1}^2 \right) \frac{C}{C^n} \left( \frac{C}{C^n} - 1 \right) \right) + \zeta_{c,t} * \left( \hat{c}_t \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) - \eta * \zeta_{c,t} \\
& * \left( \hat{c}_{t-1} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) - \frac{\eta}{1 - \eta} * \zeta_{z,t} * \left( \hat{c}_t \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) + \frac{\eta}{1 - \eta} * \zeta_{z,t} \\
& * \left( \hat{c}_{t-1} \frac{C}{C^n} + \frac{C}{C^n} - 1 \right) \left. \right] - (N^n)^{1 + \sigma_L} \left[ \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) \right) \left( \widehat{y} \widehat{h}_t + \frac{\epsilon_{HD}}{2} \Delta_{p^{HD},t} + \frac{\epsilon_{HF}}{2} \Delta_{p^{HF},t} \right) \right. \\
& + \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \left( \widehat{y} \widehat{h}_t + \frac{\epsilon_{HD}}{2} \Delta_{p^{HD},t} + \frac{\epsilon_{HF}}{2} \Delta_{p^{HF},t} \right)^2 \\
& \left. + \left( 1 + \sigma_L \left( \frac{N}{N^n} - 1 \right) + \frac{N}{N^n} \left( \frac{1}{2} \sigma_L \frac{N}{N^n} + \frac{N}{N^n} - \frac{1}{2} \right) \right) * \epsilon_L^2 \Delta_{w,t} \right] + \text{н. п. у.} + \mathcal{O}(\|\zeta\|^3).
\end{aligned}$$