Типовой вариант экзаменационного билета квалификационного экзамена для лиц, желающих вступить в саморегулируемую организацию актуариев, с решениями

Часть 1

№ 1. Определить размер ежемесячного платежа по кредиту, выданному на 2 года, если сумма кредита равна 1100 руб., годовая эффективная ставка по кредиту 8% годовых, выплаты по кредиту производятся равными частями в конце каждого месяца, начиная с 4 месяца.

Варианты ответов:

а) 53,48
б) 55,26
в) 57,26
г) 59,93
д) 60,75

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: в)

Решение:

Уравнение эквивалентности на момент выдачи кредита имеет вид:

$$L = R\nu^4 \frac{1-\nu^{21}}{1-\nu}$$

где

L – величина кредита

R – ежемесячный платеж по кредиту

ν – коэффициент дисконтирования за один месяц, соответствующий годовой эффективной ставке i = 8% годовых

$$\nu = \frac{1}{(1+i)^{1/12}} = \frac{1}{(1+0{,}08)^{1/12}} = 0{,}99361$$

Отсюда

$$R = \frac{1100(1-\nu)}{\nu^4 - \nu^{25}} = 57{,}25624$$

№ 2. По условиям эмиссии облигационного выпуска предусмотрена оферта по номиналу равному 100 руб. через 15 лет. Инвестор покупает облигации этого выпуска по цене 86 руб. Купон выплачивается ежеквартально в конце периода. Номинальная доходность к оферте составляет 9% годовых, периоды начисления процентов совпадают с купонными периодами. Определите годовую ставку купона, выплачиваемого по облигациям данного выпуска.

Варианты ответов:

а) 6,95%
б) 7,03%
в) 7,29%
г) 7,43%
д) 7,64%

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: в)

Решение:

Обозначим через j номинальную доходность к оферте, k – количество купонных платежей в году и соответственно начислений процентов. Тогда эффективная годовая доходность i к оферте определяется по формуле:

$$i = (1 + \frac{j}{k})^k - 1 = \left(1 + \frac{0{,}09}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}09308$$

Тогда эффективный годовой коэффициент дисконтирования ν будет равен:

$$\nu = \frac{1}{(1+i)} = \frac{1}{(1 + 0{,}09308)} = 0{,}91485$$

Годовая ставка купона может быть вычислена из уравнения для приведенной стоимости облигации:

$$P = N \cdot \nu^t + N \cdot g \cdot a_{t;i}^{(k)}$$

где P – цена покупки облигации инвестором
N – номинал облигации
t – срок до погашения облигации
k – количество купонных платежей
g – годовая ставка купона
i – эффективная годовая доходность к погашению

$$86 = 100 \cdot v^{15} + 100 \cdot g \cdot a_{15;5\%}^{(4)}$$

Учитывая, что

$$v^t = v^{15} = 0{,}26318$$

$$a_{t;i}^{(k)} = a_{15;0,09}^{(4)} = 8{,}18757$$

Получим

$$g = \frac{P - N \cdot v^t}{N a_{t;i}^{(k)}} = \frac{86 - 26{,}318}{818{,}757} = 7{,}28934\%$$

№ 3. У инвестора есть выбор: инвестировать на 3 года по процентной ставке 2,5% годовых, а потом на 2 года по учетной ставке d или инвестировать на 4 года по процентной ставке 2,5% годовых, а потом на 1 год по процентной ставке 4% годовых. Найти годовую учетную ставку *d*, при которой эти варианты эквивалентны. Все ставки предполагаются эффективными.

Варианты ответов:
а) 2,62%
б) 2,75%
в) 2,98%
г) 3,15%
д) 3,25%

Сумма баллов: 3.
Правильный ответ: г)

Решение:

Уравнение эквивалентности для двух вариантов инвестирования имеет вид:

$$(1 + i_1)^{t_1} \cdot \frac{1}{(1 - d)^{t_2}} = (1 + i_3)^{t_3} \cdot (1 + i_4)^{t_4}$$

где

i_1 – 2,5% годовых

t_1 – 3 года (срок инвестирования по процентной ставке i_1)

d – искомая учетная ставка

t_2 – 2 года (срок инвестирования по учетной ставке d)

i_3 – 2,5% годовых

t_3 – 4 года (срок инвестирования по процентной ставке i_3)

i_4 – 4% годовых

t_4 – 1 год (срок инвестирования по процентной ставке i_3)

Решая уравнение эквивалентности относительно неизвестной учетной ставки и подставляя соответствующие числовые значения параметров инвестирования

$$d = 1 - \left(\frac{(1+i_1)^{t_1}}{(1+i_3)^{t_3} \cdot (1+i_4)^{t_4}}\right)^{\frac{1}{t_2}}$$

$$(1+0{,}025)^3 \cdot \frac{1}{(1-d)^2} = (1+0{,}025)^4 \cdot (1+0{,}04)^1$$

$$d = 1 - \left(\frac{(1+0{,}025)^3}{(1+0{,}025)^4 \cdot (1+0{,}04)^1}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}03145$$

получаем значение искомой учетной ставки d = 3,15%

№ 4. Вкладчик сделал два взноса в негосударственный пенсионный фонд. Сначала 9 тыс. руб., а затем, через 14 лет – 18 тыс. руб. В течение первых 9 лет деньги инвестировались под номинальную учетную ставку d, начисляемую один раз в полгода, а затем под номинальную процентную ставку 5%, начисляемую ежеквартально. Определите номинальную учетную ставку d, при условии, что к концу 30 года размер накопленных средств составил 100 тыс. руб.

Варианты ответов:
а) 8,97%
б) 9,30%
в) 9,42%
г) 9,74%
д) 9,98%

Сумма баллов: 3.
Правильный ответ: б)

Решение:

Выражение для накопленной стоимости инвестиций к концу 30 года имеет вид:

$$S = S_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{k_1}\right)^{-k_1 u_1} \cdot \left(1 + \frac{i}{k_2}\right)^{k_2 \cdot (u - u_1)} + S_2 \cdot \left(1 + \frac{i}{k_2}\right)^{k_2 \cdot (u - t_2)}$$

где

S_1 – 9 тыс. руб. (первый взнос в негосударственный пенсионный фонд)

d – искомая номинальная учетная ставка

u_1 – 9 лет (период начисления по учетной ставке d)

k_1 – 2 раза в год (частота начислений процентов по учетной ставке d)

t_1 – 3 года (срок инвестирования)

i – 5% номинальная процентная ставка

k_2 – 4 раза в год (частота начислений процентов по учетной ставке i)

Подставляя числовые значения и решая последнее уравнение относительно неизвестной номинальной учетной ставки получим:

$$\left(1 - \frac{d}{k_1}\right)^{-k_1 u_1} = \frac{S - S_2 \left(1 + \frac{i_2}{k_2}\right)^{k_2 \cdot (u - t_2)}}{S_1 \left(1 + \frac{i_2}{k_2}\right)^{k_2 \cdot (u - u_1)}} = \frac{100 - 18 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot (30 - 14)}}{18 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot (30 - 9)}} =$$

$$= \frac{60,13842}{25,55202} = 2,35357$$

Получим что $d = k_1 \left(1 - 2,35357^{\frac{1}{-k_1 u_1}}\right) = 0,09288$

d = 9,3%

№ 5. Сила роста задается следующим образом: δ(t) = 0,04 + 0,003t. В момент $t_0 = 0$ сумма составляет 150 рублей. Определите сумму, накопленную к моменту времени t_1=8

Варианты ответов:

а) 227,38

б) 237,38

в) 247,38

г) 257,38

д) 267,38

Сумма баллов: 1.

Правильный ответ: а)

Решение:

При непрерывном начислении процентов с силой роста заданной линейной функцией сумма наращения S задается формулой:

$$S = S_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t_1}(a+bt)dt}$$

Подставляя значения параметров a = 0,04 и b = 0,003 и значение S_0 = 150 руб. имеем:

$$S = 150 \cdot e^{\int_0^8 (0{,}04+0{,}003t)dt} \text{руб.} = 150 \cdot e^{\left[0{,}04t+\frac{0{,}003t^2}{2}\right]_0^8} = 227{,}38288 \text{ руб.}$$

№ 6. Кредит в размере 1800 руб. по ставке 5% годовых, погашается равными платежами в конце каждого квартала в течение 11 лет. Найти величину тела кредита, погашенную в течение 5 года платежей.

Варианты ответов:
а) 151,98
б) 154,00
в) 158,32
г) 161,70
д) 164,12

Сумма баллов: 5.
Правильный ответ: б)

Решение:

Пусть L = 1800 сумма кредита.

Тогда сумма непогашенного кредита, соответствующая концу года t составит: $S_t = L \cdot \frac{a_{T-t}^{(k)}}{a_{\text{T}}^{(k)}}$

где

S_t – сумма непогашенного кредита в конце года t (после выплаты этого года)
L– величина кредита
T – срок кредита
k– периодичность выплат по кредиту

Сумма непогашенного кредита к началу 5 года платежей (осталось платить 11 – 4 = 7 лет) равна

$$S_4 = L \cdot \frac{a_7^4}{a_{11}^4} = 1800 \ \cdot \ \frac{5{,}89387}{8{,}46071} \ = 1253{,}90966$$

Аналогично сумма непогашенного кредита к концу 5 года платежей (осталось платить 11 – 5 = 6 лет) составит

$$S_5 = L \cdot \frac{a_6^4}{a_{11}^4} = 1800 \cdot \frac{5{,}16999}{8{,}46071} \ = 1099{,}90556$$

Величина тела кредита, погашенная в течение года *t* составит:

$$S_t - S_{t-1}$$

Величина тела кредита, погашенная в течение 5 года составит:

$$S_5 - S_4 \ = 1253{,}90966 - 1099{,}90556 = 154{,}0041$$

№ 7. Кредит в размере 8500 руб. выдан на 9 лет. Для его погашения создается фонд на срок выдачи кредита, на средства фонда начисляются проценты по ставке 8% годовых. Проценты по долгу погашаются отдельно. Чему равен накопленный на конец 5 года фонд в руб., если взносы в фонд производятся ежегодно в конце года и увеличиваются каждый год на 50 руб.

Варианты ответов:
а) 2370
б) 2898
в) 3511
г) 6763
д) 6959

Сумма баллов: 3.
Правильный ответ: в)

Решение:

Накопленная стоимость фонда в конце срока кредита должна составлять величину равную величине кредита:

$$L \ = \ R \cdot s_{\text{T};i} + \frac{I}{i}\left(s_{\text{T};i} - T\right)$$

где

T – 9 лет срок кредита

t – 5 лет срок, в конце которого необходимо определить накопленную стоимость фонда

L – 8500 руб. величина кредита
R – начальный платеж
i – 8% эффективная годовая ставка начисления процентов по фонду
I –50 руб. сумма, на которую ежегодно увеличиваются платежи по кредиту
$s_{t;i}$ – стоимость единичной ренты постнумерандо по ставке i% годовых

Отсюда

$$R = \frac{1}{s_{T;i}}\left(L + \frac{T \cdot I}{i}\right) - \frac{I}{i}$$

Подставляя известные значения параметров и, учитывая, что

$$s_{9;8\%} = 12{,}48756$$

Получим, что размер начального взноса в фонд составляет

$$R = \frac{1}{s_{9;8\%}}\left(8500 + \frac{9 \cdot 50}{0{,}08}\right) - \frac{50}{0{,}08} = 506{,}1257$$

Тогда, накопленный на конец 5 года фонд составит

$$S = \left(R + \frac{I}{i}\right) s_{t,i} - \frac{t \cdot I}{i}$$

учитывая, что $s_{t,i} = s_{5,8\%} = 5{,}8666$

$$S = \left(506{,}1257 + \frac{50}{0{,}08}\right) 5{,}8666 - \frac{5 \cdot 50}{0{,}08} = 3510{,}86$$

№ 8. Поток платежей состоит из двух рент: ежегодной ренты (пренумерандо) в размере 300 руб. в течение 7 лет и ежемесячной ренты (постнумерандо), которая выплачивается начиная с 8 года в течение 5 лет в размере 120 руб. в год. Вычислите современную стоимость потока платежей по номинальной ставке 6% годовых, начисляемой ежеквартально.

<u>Варианты ответов:</u>
а) 2028,78
б) 2110,12
в) 2120,52
г) 2210,55
д) 2290,83

Сумма баллов: 5.
Правильный ответ: б)

Решение:

Эффективная годовая ставка, эквивалентная заданной номинальной ставке определяется из уравнения:

$$i = (1+\frac{j_k}{k})^k \; - 1$$

где
j_k – 6% номинальная ставка с начислением процентов k раз в год,
k – 4 раза в год количество начислений процентов в год,
i – эффективная годовая ставка эквивалентная номинальной ставке j_k.

Эффективная годовая ставка эквивалентная номинальной ставке 6% годовых, начисляемой один раз в 4 года составит

$$i = (1+\frac{0{,}06}{4})^4 - 1 \; = 0{,}06136$$

Далее, современная стоимость потока платежей определяется следующим образом:

$$P = R_1 \cdot \ddot{a}_{\overline{t_1|}} + \; R_2 \cdot v^{t_1} \cdot \; a^{(m)}_{\overline{t_2|}}$$

где
R_1 – 300 руб. размер выплат ежегодной ренты
R_2 – 120 руб. размер выплат отложенной ренты
m – 12 раз в год периодичность выплат отложенной ренты

t_1 – срок ренты пренумерандо выплачиваемой первой
t_2 – срок ренты постнумерандо выплачиваемой в конце

$$P = 300 \cdot \ddot{a}_{\overline{7|}} + 120 \cdot v^7 \; a^{(12)}_{\overline{5|}}$$

$$P = 300 \cdot \frac{1-(1+0{,}06136)^{-7}}{1-(1+0{,}06136)^{-1}} +$$

$$+120 \cdot (1+0{,}06136)^{-7} \, \frac{1-(1+0{,}06136)^{-5}}{12 \cdot ((1+0{,}06136)^{1/12} - 1)} =$$

$$= 300 \cdot 5{,}89643 + 120 \cdot 2{,}84322 = 2110{,}1154$$

№ 9. Страховая компания заключила с лицом возраста (35) лет договор 5-летнего смешанного страхования. Определите единовременную нетто-премию при заданных значениях коммутационных чисел: D_{35}=12240, M_{35}=182834, D_{40}=8865, M_{40}=177218

Варианты ответов:
а) 1,18
б) 1,66
в) 1,75
г) 1,99
д) 2,15

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: а)

Решение:

Искомое значение определяется по формуле:

$$A_{35:\overline{5}|} = \frac{M_{35} - M_{35+5} + D_{35+5}}{D_{35}} = 1{,}18309$$

В нашем случае

$$A_{35:\overline{5}|} = \frac{182834 - 177218 + 8865}{12240} = 1{,}18309$$

№ 10. Зная, что модель дожития определяется формулой

$$l_x = A \cdot (B - x)^{1/2},\ 0 \le x \le B,$$

где A = 2000, а B = 90, вычислите точное значение μ_x для x = 58,25.

Варианты ответов:
а) 0,0194
б) 0,0189
в) 0,0178
г) 0,0165
д) 0,0158

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: д)

Решение:

По определению силы смертности

$$\mu_x = \frac{-\frac{d}{dx} l_x}{l_x}$$

В нашем случае

$$\mu_x = \frac{-\frac{d}{dx} A(B-x)^{1/2}}{A(B-x)^{1/2}} = \frac{A(B-x)^{-1/2}}{2A(B-x)^{1/2}} = \frac{1}{2(B-x)}$$

$$\mu_{58,25} = \frac{1}{2(90-58,25)} = 0,01575$$

№ 11. Используя экспоненциальную интерполяцию (сила смертности – постоянная) и приведенные ниже значения некоторой таблицы смертности найти значение ${}_2q_{x+0,5}$, если l_x =15000; l_{x+1} =12750; L_{x+1} =10500; $L_{x+2} = 8100$; q_{x+1}=0,2; m_{x+2}=0,55

Варианты ответов:

а) 0,4465

б) 0,3965

в) 0,3465

г) 0,2965

д) 0,2465

Сумма баллов: 3

Правильный ответ: а)

Решение:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$$

Для экспоненциальной интерполяции верно следующее равенство:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

Далее, используя преобразования находим искомую величину

$${}_2q_{x+1/2} = 1 - \frac{l_{x+\frac{5}{2}}}{l_{x+\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{l_{x+2}(p_{x+2})^{1/2}}{l_x(p_x)^{1/2}}$$

$$l_{x+2} = l_{x+1}(1-q_{x+1}) = 12750 \cdot (1-0,2) = 10200$$

$$d_{x+2} = L_{x+2} \cdot m_{x+2} = 8100 \cdot 0{,}55 = 4455$$

$$l_{x+3} = l_{x+2} - d_{x+2} = 5745$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 0{,}85$$

$$p_{x+2} = \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} = 0{,}56324$$

$$_2q_{x+1/2} = 1 - \frac{10200 \cdot 0{,}56324^{\frac{1}{2}}}{15000 \cdot 0{,}85^{\frac{1}{2}}} = 0{,}44646$$

№ 12. Договор пожизненного страхования предусматривает выплату страховой суммы в размере 1500 руб. в момент смерти, произошедшей по естественным причинам и 2400 руб. в момент смерти произошедшей в результате несчастного случая. Найдите единовременную премию за такой вид страхования при условии, что интенсивность начисления процентов равна 4%. Сила смертности постоянна, и для смерти по естественным причинам равна 0,015, а для смертности от несчастного случая равна 0,0025.

Варианты ответов:
а) 483,74
б) 487,71
в) 491,68
г) 495,65
д) 499,62

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: г)

Решение:

S_1 - страховая сумма по смерти по естественным причинам
S_2 - страховая сумма по смерти от несчастного случая
$\mu^{(1)}$ - интенсивность смертности от естественных причин
$\mu^{(2)}$ - интенсивность смертности от несчастного случая
δ - интенсивность начисления процентов
$\mu^{\tau} = \mu^{(1)} + \mu^{(2)}$

$$\text{A} = S_1 \bar{A}_x^{(1)} + S_2 \bar{A}_x^{(2)}$$

$$\bar{A}_x^{(1)} = \int_0^\infty e^{-vt} \cdot \ {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(1)} dt$$

$$\bar{A}_x^{(2)} = \int_0^\infty e^{-vt} \cdot \ {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(2)} dt$$

где

$${}_t p_x^{(\tau)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds\right) = \exp(-\mu^\tau t) = \exp\big(-(\mu^{(1)} + \mu^{(2)})t\big)$$

Следовательно, так как интенсивности смерти постоянны

$$\bar{A}_x^{(1)} = \int_0^\infty e^{-vt} \cdot \exp(-\mu^\tau t) \cdot \mu^{(1)} dt = \frac{\mu^{(1)}}{\delta + \mu^\tau}$$

$$\bar{A}_x^{(2)} = \int_0^\infty e^{-vt} \cdot \exp(-\mu^\tau t) \cdot \mu^{(2)} dt = \frac{\mu^{(2)}}{\delta + \mu^\tau}$$

Таким образом,

$$A = \frac{S_1 \mu^{(1)} + S_2 \mu^{(2)}}{\delta + \mu^\tau}$$

$$A = \frac{1500 \cdot 0{,}015 + 2400 \cdot 0{,}0025}{0{,}04 + 0{,}015 + 0{,}0025} = 495{,}6522$$

№ 13. Полагая интенсивность смертности равной $\mu_x = \frac{\lambda}{w-x}$, $0 \le x < w$, где $\lambda = 0{,}5$, $w = 120$, найдите вероятность того, что лицо возраста 30 лет скончается в диапазоне от 65 до 75 лет.

Варианты ответов:
а) 0,1006
б) 0,0876
в) 0,0746
г) 0,0616
д) 0,0486

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: в)

Решение:

Ищем решение в общем виде. Интенсивность смертности: $\mu_x = \dfrac{\lambda}{\omega - x}$. Определим вероятность того, что (x) скончается в возрасте от $x+t$ до $x+t+u$ и $\overset{\circ}{e}_x$. Искомая вероятность равна ${}_{t|u}q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t}$.

Выражая функцию дожития через известную силу смертности

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{\lambda}{\omega - x} dx\right) = \left[\exp\left(-\int_0^x \frac{dx}{\omega - x}\right)\right]^{\lambda} = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{\lambda}.$$

Получим выражение для вероятности для лица возраста x прожить t лет

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \left(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}\right)^{\lambda}.$$

Тогда

$${}_{t|u}q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t} = \left(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}\right)^{\lambda}\left(1 - \left(\frac{\omega - x - t - u}{\omega - x - t}\right)^{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{(\omega - x - t)^{\lambda} - (\omega - x - t - u)^{\lambda}}{(\omega - x)^{\lambda}}.$$

$${}_{35|10}q_{30} = \frac{(120-65)^{0,5} - (120-75)^{0,5}}{(120-30)^{0,5}} = 0{,}07463$$

№ 14. Полагая интенсивность смертности равной $\mu_x = \dfrac{\lambda}{w - x}, 0 \le x < w$, где $\lambda = 0{,}5$, $w = 110$, найдите полный средний ожидаемый срок оставшейся продолжительности жизни для лица возраста 25 лет.

Варианты ответов:
а) 55,17
б) 55,67
в) 56,17
г) 56,67
д) 57,17

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: г)

Решение:

Средний ожидаемый срок оставшейся продолжительности жизни определяется по формуле:

$$\overset{o}{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt = \int_0^{\omega-x} \left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)^{\lambda} dt = \frac{\omega-x}{\lambda+1}.$$

подставляя заданные значения параметров, получим:

$$\dot{e}_{20} = \frac{110-25}{0,5+1} = 56,66667$$

№ 15. Полагая интенсивность смертности равной $\mu_x = \frac{\lambda}{w-x}, 0 \le x < w$, где λ = 0,5, w = 110 , найдите дисперсию случайной величины, представляющей собой оставшийся срок жизни для лица возраста 25 лет.

Варианты ответов:
а) 315
б) 385
в) 642
г) 437
д) 462

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: в)

Решение:

$$\mathrm{E}\left[T_x{}^2\right] = \int_0^{\infty} t^2 \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt = -\int_0^{\infty} t^2 \left(\frac{d}{dt}\ {}_t p_x\right) dt = -\left(0 - \int_0^{\infty}\ {}_t p_x 2t dt\right) = 2\int_0^{\infty}\ {}_t p_x t dt$$

$$\mathrm{V}[T_x] = \mathrm{E}\left[T_x{}^2\right] - (\dot{e}_x)^2$$

$$\mathrm{E}\left[T_x{}^2\right] = 2\int_0^{\infty}\ {}_t p_x t dt$$

Далее имеем

$${}_t p_x = \left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)^{\lambda}$$

$$\mathrm{E}\left[T_x{}^2\right] = 2\int_0^{\omega-x} \left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)^{\lambda} t dt =$$

$$= -2\left(-\frac{\omega-x}{\lambda+1}\left(1-\frac{1}{\omega-x}t\right)^{\lambda+1} \cdot t\Bigg|_0^{\omega-x} - \frac{\omega-x}{\lambda+1}\int_0^{\omega-x}\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)^{\lambda+1} dt\right) =$$

$$= -2\frac{\omega-x}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\left(1-\frac{1}{\omega-x}t\right)^{\lambda+2}\Bigg|_0^{\omega-x} = 2\frac{\omega-x}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$$

$$(\dot{e}_x)^2 = \left(\frac{\omega - x}{\lambda + 1}\right)^2$$

$$\mathrm{V}[T_x] = 2\ \frac{(\omega - x)^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} - \left(\frac{\omega - x}{\lambda + 1}\right)^2 = 3853{,}33333 - 3211{,}11111 = 642{,}22222$$

№ 16. Пусть символы a и b обозначают, соответственно, вероятности того, что (62) прожив 5 месяцев, скончается в следующие 6 месяцев в разных предположениях о распределении времени смерти внутри каждого годичного интервала. Пусть a определяется в предположении о равномерном распределении времени смерти внутри каждого годичного возрастного интервала, а – b в предположении о постоянстве интенсивности смертности внутри каждого годичного возрастного интервала. Используя показатели иллюстративных таблиц смертности, найдите *3a-b*.

Варианты ответов:
а) 0,01199
б) 0,01291
в) 0,02112
г) 0,02468
д) 0,03456

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: б)

Решение:

Обозначим $t = \frac{5}{12}$; $y = \frac{6}{12}$; $\underline{t+y < 1}$
Искомые вероятности равны соответственно

$$a = {}_{t|y}q_x \ = \ \frac{l_{x+t} - l_{x+t+y}}{l_x} = \frac{\left(l_x \ - td_x\ \right) - \left(l_x \ - (t+y)d_x\ \right)}{l_x} = \frac{yd_x}{l_x} = yq_x$$

$$a = 0{,}5 \cdot 0{,}01198 \ = 0{,}00599$$

$$b = {}_{t|y}q_x \ = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+y}}{l_x} = \frac{(l_{x+1})^t \cdot (l_x)^{1-t} - (l_{x+1})^{t+y} \cdot (l_x)^{1-t-y}}{l_x}$$

$$b = {}_{t|y}q_x \ = \ \frac{(l_{61})^{5/12} \cdot (l_{60})^{7/12} - (l_{61})^{11/12} \cdot (l_{60})^{1/12}}{l_{60}}$$

$$b = {}_{t|y}q_x = \frac{85441^{5/12} \cdot 86316^{7/12} - 85441^{11/12} \cdot 86316^{1/12}}{86316} = 0{,}00506$$

$$3a - b = 3 \cdot 0{,}00599 - 0{,}00506 = 0{,}01291$$

№ 17. Полис пожизненного страхования для застрахованного в возрасте (42) лет предусматривает выплату страхового обеспечения в размере 3000 руб. в конце года наступления смерти. Оплата страхования осуществляется ежегодно равными страховыми премиями, уплачиваемыми в начале очередного года страхования, рассчитанными на основе принципа эквивалентности. Найти величину брутто резерва на конец 7 года страхования, в следующих предположениях:

- Актуарные иллюстративные таблицы i = 6%.
- Расходы по полису, уплачиваемые в начале очередного года страхования определяются следующим образом:

	в % от премии	В % от страховой суммы при выплате страхового возмещения	Фиксированные расходы на полис
первый год страхования	24%	0,2%	32
последующие годы	4%	0,06%	12

Варианты ответов:

а) 568,11
б) 464,21
в) 314,76
г) 228,70
д) 164,82

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: д)

Решение:

Введём обозначения:
$t = 7$
$Exp_{1\ \%G} = 0{,}24$
$Exp_{2\ \%G} = 0{,}04$
$Exp_{1\ \%SA} = 0{,}002$
$Exp_{2\ \%SA} = 0{,}0006$
$Exp_{1_c} = 32$

$Exp_{2\ c} = 12$

Из Актуарной иллюстративной таблицы смертности для i = 6%.

$$\ddot{a}_{42} = 14{,}93;\ \ddot{a}_{49} = 13{,}96$$
$$A_{42} = 0{,}155;\ A_{49} = 0{,}209$$

Из принципа эквивалентности имеем

$$SA\ \cdot A_x \cdot \left(1 + Exp_{2\ \%SA}\right) + \left(Exp_{1\ \%SA} - Exp_{2\ \%SA}\right) \cdot SA \cdot q_x + \left(Exp_{1_c} - Exp_{2\ c}\right) + Exp_{2_c} \cdot \ddot{a}_x =$$

$$= G \cdot \left[(1 - Exp_{2\ \%G}) \cdot \ddot{a}_x - (Exp_{1\ \%G} - Exp_{2\ \%G})\right]$$

где G- годовая премия, а SA- страховая выплата.

Отсюда

$$3000 \cdot 0{,}155 \cdot (1 + 0{,}0006) + (0{,}002 - 0{,}0006) \cdot 3000 \cdot 0{,}00283\ + (32 - 12) + 12 \cdot 14{,}93 = G \cdot [(10{,}04) \cdot 14{,}93 - (0{,}24 - 0{,}04)]$$
$$G = 47{,}01481$$

Резерв на конец года t (=7) вычисляется по формуле:

$${}_tV = SA \cdot (1 + Exp_{2\ \%SA}) \cdot A_{x+t} + \left(Exp_{1\ \%G} \cdot G + Exp_{2\ c}\right) \cdot \ddot{a}_{x+t}\ - G \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

$${}_7V = 3000 \cdot (1 + 0{,}0006) \cdot 0{,}209 + (0{,}24 \cdot 47{,}01481 + 12) \cdot 13{,}96 -$$
$$-47{,}01481 \cdot 13{,}96 = 164{,}82252$$

№ 18. Используя показатели иллюстративных таблиц смертности при технической ставке i = 4%, вычислите дисперсию случайной величины, настоящей стоимости страховых выплат по договору 10-летнего смешанного страхования жизни, заключенного со страхователем возраста (30) лет предусматривающего выплату страховой суммы в размере 105 руб. в конце года смерти или по окончании срока действия договора.

Варианты ответов:

а) 5,77
б) 4,57
в) 3,16
г) 2,49
д) 1,85

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: б)

Решение:

Пусть $x = 30$, $n = 10$. Известно, что искомая величина

$$\mathbf{D}[Z] = b^2\left[{}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2\right]. \qquad (1)$$

Для того, чтобы использовать табличные значения, воспользуемся формулой

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{\;1}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x = A_x - {}_nE_x \cdot A_{x+n} + {}_nE_x = A_x + \frac{l_{x+n}}{l_x}(1+i)^{-n}\left(1 - A_{x+n}\right). \qquad (2)$$

$${}^2A_{x:\overline{n}|} = {}^2A_x + \frac{l_{x+n}}{l_x}(1+i)^{-2n}\left(1 - {}^2A_{x+n}\right). \qquad (3)$$

Из таблиц смертности получаем значения величин, входящих в правые части равенств (1)-(3):

$$l_{30} = 97461, l_{40} = 95465, A_{30} = 0{,}181,$$

$$A_{40} = 0{,}249,\ {}^2A_{30} = 0{,}051,\ {}^2A_{40} = 0{,}085$$

Подставив эти значения в (1)-(3), получим

$$A_{30:\overline{10}|} = 0{,}67796;\ \ {}^2A_{30:\overline{10}|} = 0{,}46004; D[Z] = 4{,}56897$$

№ 19. Страхователь возраста (x) = 31 год заключил трехлетний договор смешанного страхования жизни со страховой выплатой размера S = 125 руб., производимой в момент смерти страхователя, либо в момент окончания договора. Вычислите единовременную нетто-премию для такого договора, если известно, что моменты смерти равномерно распределены внутри каждого годичного возрастного интервала в течение этих трех лет, и известна интенсивность начисления процента δ = 0,09. Для вычислений пользуйтесь иллюстративными таблицами смертности.

Варианты ответов:

а) 95,50
б) 100,43
в) 105,36
г) 110,29
д) 115,22
Сумма баллов: 2
Правильный ответ: а)

Решение:

Положим $x = 31;\ \delta = 0{,}09; b = 125$. Искомая нетто-премия равна $b\bar{A}_{x:\bar{3}|}$. Известно, что $\bar{A}_{x:\bar{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\bar{n}|} + {}_nE_x$, где первое слагаемое есть разовая нетто-премия за n летнее временное страхование, а второе слагаемое является разовой нетто-премией за n летнее страхование на дожитие. Учитывая, что ${}_3E_x = {}_3p_x \cdot e^{-3\delta}$, получим

$$\bar{A}^{1}_{x:\bar{3}|} = \int_0^3 e^{-\delta t}\, {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt = \int_0^1 e^{-\delta t}\, {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt + \int_1^2 e^{-\delta t}\, {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt + \int_2^3 e^{-\delta t}\, {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-\delta t}\, {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt + e^{-\delta} p_x \int_0^1 e^{-\delta\tau}\, {}_\tau p_{x+1} \cdot \mu_{x+1+\tau}d\tau + e^{-2\delta}\, {}_2p_x \int_0^1 e^{-\delta\tau}\, {}_\tau p_{x+2} \cdot \mu_{x+2+\tau}d\tau =$$

$$= q_x \int_0^1 e^{-\delta\tau}d\tau + e^{-\delta} p_x \cdot q_{x+1} \int_0^1 e^{-\delta\tau}d\tau + e^{-2\delta}\, {}_2p_x \cdot q_{x+2} \int_0^1 e^{-\delta\tau}d\tau.$$

Последний переход обусловлен предположением о том, что моменты смерти равномерно распределены внутри каждого годичного возрастного интервала.

Таким образом:

$$\bar{A}^{1}_{x:\bar{3}|} = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\left[q_x + e^{-\delta}(1-q_x)q_{x+1} + e^{-2\delta}(1-q_x)(1-q_{x+1})q_{x+2}\right]$$ и общая формула для $\bar{A}_{x:\bar{3}|}$ принимает вид:

$$\bar{A}_{x:\bar{3}|} = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\left[q_x + e^{-\delta}(1-q_x)q_{x+1} + e^{-2\delta}(1-q_x)(1-q_{x+1})q_{x+2}\right] + \frac{l_{x+3}}{l_x}e^{-3\delta}.$$

Из таблиц смертности следует, что

$$l_{31} = 97308;\ l_{34} = 96778;\ q_{31} = 0{,}00171;\ q_{32} = 0{,}00182;\ q_{33} = 0{,}00193.$$

Используя эти величины в вышеприведенной формуле, получим, что искомая нетто-премия равна 95,4975.

№ 20. Контракт по смешанному страхованию жизни на срок 3 года для клиента возраста (61) год предполагает выплату страховой суммы равной 850 тыс. руб. в конце страхового года в случае смерти или в конце срока действия полиса в случае дожития. Уплата страховых взносов осуществляется в начале каждого страхового года в размере 276344,15 руб. Начальные издержки составляют 51 тыс. руб. Найти норму прибыльности контракта, выраженную внутренней годовой процентной ставкой, при следующих предположениях:

Нетто резервы вычисляются по ставке 5% годовых, ставка инвестиционного дохода 6% годовых;

Вероятности дожития для (61) $\{ {}_1p_x;\ \ {}_2p_x;\ \ {}_3p_x \}$
равны соответственно {0,9951; 0,988; 0,9755}

Варианты ответов:
а) 18,62%
б) 16,25%
в) 13,88%
г) 11,51%
д) 9,14%

Сумма баллов: 6
Правильный ответ: а)

Решение:

G = 276344,15 руб. – годовая премия

S = 850 тыс. руб. – страховая сумма
e_0 = 51 тыс. руб. – начальные издержки
i= 5% – базисная ставка для расчета резервов
j= 6% – базисная ставка для расчета прибыли

$$PR_0 = -\, e_0$$

Величина прибыли по итогам года с номером t равна

$$PR_t = \left({}_{t-1}V + G\right)(1+i) - (S \cdot q_{[x]+t-1} + \ {}_tV \cdot p_{[x]+t-1})$$

где G- премия S – страховая сумма

$$q_{[x]+t-1} = 1 - \frac{{}_tp_{[x]}}{{}_{t-1}p_{[x]}}$$

$$q_{[61]} = 1 - p_{[61]} = 1 - 0{,}9951 = 0{,}0049$$

$$q_{[61]+1} = 1 - \frac{{}_2p_{[61]}}{p_{[61]}} = \ 1 - \frac{0{,}988}{0{,}9951} \ = 0{,}00713$$

$$q_{[61]+2} = 1 - \frac{0{,}9755}{0{,}988} = 0{,}01265$$

Нетто-резервы вычисляются как

$${}_tV = S(1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{[x]+t:n-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{[x]:n|}}})$$

$$\ddot{a}_{\overline{[61]:3|}} = 1 + p_{[61]} \cdot (1+0{,}05)^{-1} + \ {}_2p_{[61]} \ \cdot (1+\ 0{,}05)^{-2}$$
$$\ddot{a}_{\overline{[61]:3|}} = 1 + 0{,}9951 \cdot (1+0{,}05)^{-1} + 0{,}988 \cdot (1+0{,}05)^{-2} = 2{,}84386$$

$$\ddot{a}_{\overline{[61]+1:2|}} = \ 1 + p_{[61]+1} \cdot (1+0{,}05)^{-1} = 1 + \frac{{}_2p_{[61]}}{p_{[61]}} \cdot (1+0{,}05)^{-1}$$
$$\ddot{a}_{\overline{[61]+1:2|}} = 1 + \frac{0{,}988}{0{,}9951} \cdot (1+0{,}05)^{-1} = 1{,}94559$$

$$\ddot{a}_{\overline{[61]+2:1|}} = 1$$
$${}_0V = 0{,}01117$$

$${}_1V = S\left(1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{[61]+1:2|}}}{\ddot{a}_{\overline{[61]:3|}}}\right) = 850000\left(1 - \frac{1{,}94559}{2{,}84386}\right) = 268483{,}50481$$

$${}_2V = 850000\left(1 - \frac{1}{2{,}84386}\right) = 551110{,}46254$$

$${}_3V = 850000(1 - 0\ ) = 850000$$

$$PR_0 = -51000$$

$$PR_1 = \left(\ {}_0V + G\right)(1+i) - (S \cdot q_{[61]} + \ {}_1V \cdot p_{[61]})$$

$$PR_1 = 0{,}01117 + 276344{,}15) \cdot (1 + 0{,}06) -$$
$$-(850000 \cdot 0{,}0049 + 268483{,}50481 \cdot 0{,}9951) = 21591{,}86336$$

$$PR_2 = \left(\ {}_1V + G\right)(1+i) - (S \cdot q_{[61]+1} + \ {}_2V \cdot p_{[61]+1})$$

$$PR_2 = (268483{,}50481 + 276344{,}15) \cdot (1 + 0{,}06) -$$
$$-(850000 \cdot 0{,}00713 + 551110{,}46254 \cdot 0{,}99287) = 24275{,}76916$$

$$PR_3 = \left(\ {}_2V + G\right)(1+i) - (S \cdot q_{[61]+2} + \ {}_3V \cdot p_{[61]+2})$$

$$PR_3 = (551110{,}46254 + 276344{,}15) \cdot (1 + 0{,}06) - 850000 \cdot 0{,}01265 =$$
$$= 27101{,}88929$$

Текущая актуарная стоимость прибылЬ NPV при доходности контракта *r* определяется по формуле:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} (1+r)^t \ \cdot PR_t \cdot {}_{t-1}p_{[x]}$$

$$NPV = PR_0 + \frac{PR_1 \cdot p_{[x]}}{1+r} + \frac{PR_2 \cdot \ {}_2p_{[x]}}{(1+r)^2} + \frac{PR_3 \cdot \ {}_3p_{[x]}}{(1+r)^3}$$

Решая это уравнение относительно неизвестной внутренней процентной ставки:

$$0 = -51000 + \frac{21591{,}86336 \cdot 0{,}9951}{1+r} + \frac{24275{,}76916 \cdot 0{,}988}{(1+r)^2} + \\ + \frac{27101{,}88929 \cdot 0{,}9755}{(1+r)^3}$$

получаем r = 0,18621 или r = 18,62%

№ 21. Предприятие заключило договор с пенсионным фондом. В соответствии с этим договором предприятие в течение трех лет в начале каждого года выплачивает пенсионному фонду взнос за сотрудника, точный возраст которого на момент заключения договора – (62) года. Взамен этого пенсионный фонд обязуется по достижении сотрудником (65) лет выплачивать ему ежегодную пенсию пренумерандо в размере 16000 руб. Начальные издержки фонда составляют 20% от годовой премии, издержки в начале второго и третьего годов действия договора равны 4% от годовой премии, издержки при выплате пенсий составляют 2% от годовой пенсии и возникают в начале каждого года. Резерв на начало действия договора равен 0, на конец первого и второго годов, соответственно, 59887,98 и 128539,01 тыс. руб. Базисная ставка для расчета резервов 4%. Базисная ставка для расчета прибыли 6,5%. Период селекции 2 года. Чему равна маржа прибыли, при ставке дисконтирования 8%.

Варианты ответов:

а) 2,79%
б) 3,92%
в) 4,95%
г) 5,98%
д) 7,01%

Сумма баллов: 6
Правильный ответ: б)

Решение:

Введем обозначения:
G – годовая премия

P = 16000 руб. пенсия

${}_tV$ –резерв на конец года t

Ex = 20% от величины годовой премии начальные издержки

ex_1 = 4% от величины премии издержки в начале второго и третьего года

ex_2 = 2% от величины пенсии издержки связанные с выплатой пенсий.

${}_0V = 0$

${}_1V = 59887{,}98$

${}_2V = 128539{,}01$

j – процентная ставка для расчета резервов

i – процентная ставка для расчета прибыли

r – процентная ставка для расчета маржи прибыли

$${}_3V = P \cdot (1 + ex_2) \cdot \ddot{a}_{[62]+3} = 16000 \cdot (1 + 0{,}02) \cdot 12{,}28 = 200409{,}6$$

где $\ddot{a}_{[62]+3} = 12{,}28$ (значение из таблицы для ставки j = 4%)

$${}_0V = (1 + ex_2)P\ddot{a}_{[x]+3} \cdot \frac{{}_3p_x}{(1+j)^3} + (\mathrm{Ex} - ex_1)G - (1 - ex_1)G\ddot{a}_{\overline{x:3|}}$$

$$G = \frac{(1 + 0{,}02) \cdot 16000 \cdot 12{,}28 \cdot 0{,}97334}{(1 + 0{,}04)^3((1 - 0{,}04) \cdot 2{,}86939 - (0{,}2 - 0{,}04))} = 66835{,}96926$$

Величина прибыли

$$PR_0 = -\mathrm{Ex} \cdot G = 0{,}2 \cdot 66835{,}96926 = -13367{,}19385$$

$$PR_1 = \left({}_0V + G\right)(1 + i) - {}_1V \cdot p_{[x]}$$

$$PR_1 = 66835{,}96926 \cdot (1 + 0{,}065) - 59887{,}98 \cdot (1 - 0{,}00526) = \\ = 11607{,}33803$$

$$PR_2 = \left({}_1V + (1 - ex_1) \cdot G\right)(1 + i) - {}_2V \cdot p_{[x]+1}$$

$$PR_2 = (59887{,}98 + (1 - 0{,}04) \cdot 66835{,}96926) \cdot (1 + 0{,}065) - 128539{,}01 \cdot \\ \cdot (1 - 0{,}00738) = 4523{,}40157$$

$$PR_3 = \left({}_2V + (1 - ex_1) \cdot G\right)(1 + i) - {}_3V \cdot p_{[x]+2}$$

$$PR_3 = (128539{,}01 + (1 - 0{,}04) \cdot 66835{,}96926) \cdot (1 + 0{,}065) - 200409{,}6 \cdot \\ \cdot (1 - 0{,}01424) = 7671{,}37333$$

Маржа прибыли вычисляется как отношение

$$\frac{NPV}{G \cdot \ddot{a}_{\overline{x:3|}}}$$

При процентной ставке r=8%

$$\ddot{a}_{\overline{x:3|}} = 1 + \frac{p_{[x]}}{(1+r)} + \frac{{}_2p_x}{(1+r)^2}$$

$$\ddot{a}_{\overline{62:3|}} = 1 + (1 - 0{,}00526) \cdot 0{,}92593 + 0{,}9874 \cdot 0{,}92593^2 = 2{,}7676$$

$$G \cdot \ddot{a}_{\overline{62:3|}} = 66835{,}96926 \cdot 2{,}7676$$

$$NPV = PR_0 + \frac{PR_1}{1+r} + \frac{PR_2 \cdot p_{[x]}}{(1+r)^2} + \frac{PR_3 \cdot {}_2p_{[x]}}{(1+r)^3}$$

$$NPV = -13367{,}19385 + 11607{,}33803 \cdot 0{,}92593 +$$
$$+4523{,}40157 \cdot (1 - 0{,}00526) \cdot 0{,}92593^2 + 7671{,}37333 \cdot 0{,}9874 \cdot 0{,}92593^3 =$$
$$= 7251{,}24321$$

Тогда маржа прибыли равна

$$\frac{NPV}{G \cdot \ddot{a}_{\overline{62:3|}}} = \frac{7251{,}24321}{66835{,}96926 \cdot 2{,}7676} = 0{,}0392$$

№ 22. Страхователь возраста $x = (60)$ заключил со страховой компанией договор следующего содержания. Если смерть страхователя наступит в течение первых 4 лет действия договора, то в конце года смерти страховщик обязан выплатить страховое возмещение равное $125 \cdot (k+1)$, где k целое число лет, прошедших с момента заключения договора. В противном случае в конце года смерти ему будет выплачена сумма, равная 500. Используя иллюстративные таблицы смертности при значении процентной ставки 4%, найдите единовременную нетто-премию для такого договора.

Варианты ответов:
а) 211,66
б) 216,83
в) 222,00
г) 227,17
д) 232,34

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: в)

<u>Решение:</u>

Положим n = 4; b = 125; v =1/(1+i)

По условию задачи современная случайная величина выплат равна

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} b(K+1), K = 0,1,\dots,n-1 \\ v^{K+1} bn, K \ge n \end{cases}$$

Обозначим искомую нетто-премию A.

Очевидно, что

$$A = \mathbf{E}[Z] = b\left[(IA)^{\,1}_{x:\overline{n|}} + n \cdot {}_nE_x \cdot A_{x+n} \right]$$

Для того чтобы воспользоваться табличными данными, воспользуемся следующим соотношением:

$$(IA)_x = (IA)^{\,1}_{x:\overline{n|}} + {}_nE_x \left[nA_{x+n} + (IA)_{x+n} \right]$$

Откуда получим

$$A = b\left[(IA)_x - {}_nE_x \cdot \left(IA\right)_{x+n} \right] = b\left[(IA)_x - (1+i)^{-n} \left(IA\right)_{x+n} \frac{l_{x+n}}{l_x} \right]$$

$$A = 125 \, \left[(IA)_{60} - (1+0{,}04)^{-4} (IA)_{64} \cdot \frac{l_{64}}{l_{60}} \right]$$

$$A = 125 \, \left[8{,}294 - (1{,}04)^{-4} \cdot 7{,}984 \cdot \frac{82436}{86316} \right] = 222{,}00202$$

№ 23. Интенсивность смертности подчиняется закону Мейкхэма $\mu(t) = A + Bc^t$. Найдите вероятность того, что человек возраста x = 64 лет проживет ещё 6 лет, и умрет в следующие 3 года, если А = 0,012; В = 0,01; С = 1,011.

<u>Варианты ответов:</u>

а) 0,0697

б) 0,0721

в) 0,0745

г) 0,0769

д) 0,0793

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: д)

<u>Решение:</u>

Функция дожития

$$s(t) = exp\left\{-\int_0^t \mu(y)dy\right\} = exp\left\{-At - \frac{B}{\ln c}(c^t - 1)\right\}$$

Искомая вероятность равна

$$_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$$

где

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \exp\{-At - \frac{B}{\ln c}c^x(c^t - 1)\}$$

$$_uq_{x+t} = 1 - {}_up_{x+t} = 1 - \exp\{-Au - \frac{B}{\ln c}c^{x+t}(c^u - 1)\}$$

Подставляя в эти формулы значения параметров из условия задачи, получим

$$_6p_{64} = \exp\left\{-0{,}012 \cdot 6 - \frac{0{,}01}{\ln 1{,}011}1{,}011^{64}(1{,}011^6 - 1)\right\} = 0{,}82127$$

$$_3q_{70} = 1 - \exp\left\{-0{,}012 \cdot 3 - \frac{0{,}01}{\ln 1{,}011}1{,}011^{70}(1{,}011^3 - 1)\right\} = 0{,}09660$$

$$_{6|3}q_{64} = {}_6p_{64} \cdot {}_3q_{70} = 0{,}07934$$

№ 24. Договор пожизненного страхования лица в возрасте 75 лет предусматривает выплату страхового обеспечения 1100 рублей в конце квартала наступления смерти застрахованного лица. Страховая премия в размере 70 рублей поступает в начале каждого полугодия страхования, комиссия в размере 11% от премии выплачивается немедленно по получении страховой премии. Пусть $_tV$ обозначает брутто-резерв по полису на момент времени t с начала действия договора страхования.

Найти ${}_{15,25}V$ в предположениях, что:

${}_{15,75}V = 895$

$i^{(4)} = 7\%$

t	0	0,25	0,5	0,75
L_{x+15+t}	1020	914	808	702

Варианты ответов:

а) 858

б) 812

в) 765

г) 743

д) 698

Сумма баллов: 3

Правильный ответ: а)

Решение:

Пусть

G =70 руб. – страховая премия;

SA =1100 руб. – страховая сумма;

exp = 0,11G – ставка расходов.

Из данного в условии фрагмента таблицы смертности имеем

$$ {}_{0,25}p_{75+15+0,5} = \frac{l_{75+15,75}}{l_{75+15,5}} = 0,86881 $$

$$ {}_{0,25}q_{75+15+0,5} = 1 - {}_{0,25}p_{75+\ 15+0,5} = 0,13119 $$

$$ {}_{0,25}p_{75+15+0,25} = \frac{l_{75+15,5}}{l_{75+15,25}} = 0,88403 $$

$$ {}_{0,25}q_{75+15+0,25} = 1 - {}_{0,25}p_{75+15,25} = 0,11597 $$

Далее

$$ ({}_{15,5}V + G(1-exp))(1+\frac{i^{(4)}}{4}) = SA \cdot {}_{0,25}q_{75+15,5} + {}_{15,75}V \cdot {}_{0,25}p_{75+15,5} $$

аналогично

$$ ({}_{15,25}V + G(1-exp))(1+\frac{i^{(4)}}{4}) = SA \cdot {}_{0,25}q_{75+15,25} + {}_{15,5}V \cdot {}_{0,25}p_{75+15,25} $$

Отсюда

$$_{15,5}V=\frac{\left(SA\cdot{}_{0,25}q_{75+15,5}+{}_{15,75}V\cdot{}_{0,25}p_{75+15,5}-G(1-exp)\right)(1+\frac{i^{(4)}}{4})\Big)}{1+\frac{i^{(4)}}{4}}$$

$$_{15,5}V=\frac{\left(1100\cdot 0{,}13119+895\cdot 0{,}86881-70(1-0{,}11)\right)(1+\frac{0{,}07}{4})\Big)}{1+\frac{0{,}07}{4}}$$

$$_{15,5}V=843{,}73828$$

$$_{15,25}V=\frac{\left(SA\cdot{}_{0,25}q_{75+15,25}+{}_{15,5}V\cdot{}_{0,25}p_{75+15,25}-G(1-exp)\right)(1+\frac{i^{(4)}}{4})\Big)}{1+\frac{i^{(4)}}{4}}$$

$$_{15,25}V=\frac{\left(1100\cdot 0{,}11597+843{,}73828\cdot 0{,}88403-70(1-0{,}11)\right)(1+\frac{0{,}07}{4})\Big)}{1+\frac{0{,}07}{4}}$$

значит,

$$_{15,25}V=858{,}43435$$

№ 25. Полис рискового страхования жизни [x] = 45 на срок 3 года оплачивается ежеквартальными премиями, вносимыми в начале очередного квартала страхования, страховая сумма составляет 2000 руб. и выплачивается в конце года наступления страхового случая. Найти величину квартальной премии в следующих предположениях:

- Смерти равномерно распределены в течении каждого года жизни
- i = 6%

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	$x+2$
45	18895	18744	18500	47
46	18409	18247	17992	48
47	17883	17715	17444	49

Варианты ответа:
а) 13,51
б) 12,46
в) 10,55
г) 8,82
д) 7,69

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: д)

Решение:

Вычислим

$$A^1{}_{[x]:\overline{3}|} = q_{[x]} \times v + {}_{1|}\,q_{[x]} \times v^{\,2} + {}_{2|}\,q_{[x]} \times v^{\,3} =$$

$$= v \times \frac{\left(l_{\,[x]} - l_{\,[x]+1}\right)}{l_{\,[x]}} + v^{\,2} \times \frac{\left(l_{\,[x]+1} - l_{\,x+2}\right)}{l_{\,[x]}} + v^{\,3} \times \frac{\left(l_{\,x+2} - l_{\,x+3}\right)}{l_{\,[x]}} =$$

$$= 0{,}04255$$

Аналогично

$$\ddot{a}_{\,[x]:\overline{3}|} = 1 + p_{[x]} \times v + {}_{2}\,p_{[x]} \times v^{\,2} =$$

$$= 1 + v \times \frac{\left(l_{\,[x]+1}\right)}{l_{\,[x]}} + v^{\,2} \times \frac{\left(l_{\,x+2}\right)}{l_{\,[x]}} = 2{,}83284$$

$${}_{3}E_{\,[x]} = {}_{3}\,p_{[x]} \times v^{\,3} = \frac{\left(l_{\,x+3}\right)}{l_{\,[x]}} \times v^{\,3} = 0{,}82255$$

Воспользовавшись приближённой формулой, для m = 4 (где m – количество выплат в год) имеем

$$\ddot{a}^{\,(4)}{}_{[x]:\overline{3}|} = \ddot{a}_{\,[x]:\overline{3}|} - \frac{m-1}{2m} \times \left(1 - {}_{3}E_{\,[x]}\right) = 2{,}7663$$

Таким образом, $P = SA \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{A^1{}_{[x]:\overline{3}|}}{\ddot{a}^{\,(4)}{}_{[x]:\overline{3}|}} = 7{,}69078$

№ 26. Полис рискового страхования жизни (x) = 51 на срок 3 года оплачивается периодическими премиями, вносимыми в начале очередного года страхования, страховая сумма = 35000 выплачивается в конце года наступления страхового случая. Найти величину премии P в следующих предположениях:

• Сила смертности задается по правилу $\mu_{x+t} + 0{,}037,\ t \geq 0$ где через μ_{x+t} обозначена сила смертности из Актуарной иллюстративной таблицы смертности;

• i = 6%.

Варианты ответов:

а) 1340,68
б) 1366,68
в) 1392,68
г) 1418,68
д) 1444,68

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: б)

Решение:

Пусть

${}_tp_x$ – вероятность дожития, соответствующая интенсивности μ_{x+t};

${}_tp'_x$ – скорректированная вероятность дожития соответствующая

$\mu_{x+t} + \sigma,$ где $\sigma = 0{,}037.$

Из условия задачи имеем

$$ {}_t\, p'_x = \exp[-\int_0^t (\mu_{x+s} + \sigma) ds] = {}_t\, p_x e^{-\sigma t} $$

Таким образом,

$$ \ddot{a}_{\ x:\overline{3}|} = 1 + p_x \cdot e^{-\sigma} \cdot v + {}_2\, p_x \cdot v^{\,2} \cdot e^{-2\sigma} = 2{,}7228 $$

Известно, что

$$ A_{\ x:\overline{n}|} = A^1{}_{x:\overline{n}|} - A_{\ x:\overline{n}|}{}^{1} $$

Так как

$$ A_{\ x:\overline{3}|} = 1 - d\ddot{a}_{\ [x]:\overline{3}|} = 1 - \frac{i}{1+i} \ddot{a}_{\ x:\overline{3}|} = 0{,}84588 $$

$$ A_{\ x:\overline{3}|}{}^{1} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot v^3 \cdot e^{-3\sigma} = 0{,}73956 $$

получаем

$$A^1{}_{x:\overline{3}|} = A_{\ x:\overline{3}|} - A_{\ x:\overline{3}|}{}^1 = 0{,}84588 - 0{,}73956 = 0{,}10632$$

Окончательно имеем

$$P = SA \times (A^1{}_{x:\overline{3}|}/\ddot{a}_{\ x:\overline{3}|}) \ = 35000 \ \cdot \ (0{,}10632/2{,}7228) = \ 1366{,}68136$$

№ 27. Какие выделяют основные этапы построения математической модели?
I. Определение цели
II. Определение параметров модели
III. Формирование управляющих переменных, изменяя значение которых можно приближаться к поставленной цели
IV. Определение области допустимых решений
V. Определение языка программирования, используемого для реализации построенной математической модели
VI. Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы

Варианты ответов:
а) Все, кроме III
б) Все, кроме IV
в) Все, кроме V
г) Все, кроме VI
д) Все варианты верны

Сумма баллов: 1.
Правильный ответ: в).

№ 28. Укажите верное утверждение.

Варианты ответов:
а) Актуарная деятельность – деятельность по анализу и количественной, финансовой оценке рисков и (или) обусловленных наличием рисков финансовых обязательств, а также разработке и оценке эффективности методов управления финансовыми рисками
б) Актуарное оценивание – деятельность по анализу и количественной, финансовой оценке рисков и (или) обусловленных наличием рисков финансовых обязательств, а также разработке и оценке эффективности методов управления финансовыми рисками
в) Ответственный актуарий – физическое лицо, осуществляющее на профессиональной основе в соответствии с трудовым договором или

гражданско-правовым договором актуарную деятельность и являющееся членом саморегулируемой организации актуариев
г) Объект актуарной деятельности – Центральный банк Российской Федерации (Банк России)
д) Объект актуарной деятельности - актуарий и ответственный актуарий

Сумма баллов: 1.
Правильный ответ: а)

№ 29. Субъектами актуарной деятельности являются:
I. Актуарий
II. Правительство Российской Федерации
III. Ответственный актуарий
IV. Центральный банк Российской Федерации
V. Федеральная служба страхового надзора Российской Федерации

Варианты ответов:
а) Только I
б) I, III и IV
в) Только I и III
г) I, III и V
д) Только V

Сумма баллов: 1.
Правильный ответ: в)

№ 30. Актуарий должен быть:

Варианты ответов:
а) Работником Банка России
б) Членом саморегулируемой организации актуариев
в) Членом Совета по актуарной деятельности
г) Членом Национальной ассоциации негосударственных пенсионных фондов
д) Членом Всероссийского союза страховщиков

Сумма баллов: 1.
Правильный ответ: б)

№ 31. В описании программ страхования указываются следующие условия страхования:

I. Страховые риски (смерть страхователя (застрахованного), дожитие страхователя (застрахованного) до определенного возраста, срока или наступление иных событий в жизни страхователя (застрахованного), предусмотренных договором страхования)

II. Сроки страхования, периоды уплаты страховой премии и страховой выплаты, определенные договором страхования или пожизненно

III. Порядок уплаты страховой премии (единовременно, путем внесения страховых взносов периодически, в установленные договором страхования сроки)

IV. Описание методов и формулы расчета нормы (ставки) доходности

V. Размер страховой суммы (постоянная, возрастающая или убывающая)

Варианты ответов:

а) Все, кроме II

б) Все, кроме III

в) Все, кроме IV

г) Все, кроме V

д) Все вышеперечисленное

Сумма баллов: 1.

Правильный ответ: в)

Часть 2

№ 32. Страховая компания продает полисы страхования, каждый из которых принадлежит одной из трех возможных групп риска. Количество исков внутри каждой группы имеет распределение Пуассона с параметром λ, а размер иска имеет Гамма распределение с функцией плотности $f_x = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$ и параметрами α и β. Количество исков и размер исков независимы внутри группы. Данные по каждой группе представлены в таблице. Вычислите доверительную премию модели Бюльмана для агрегированных убытков при условии, что по данным прошлого года предъявлено 28 исков, средний размер которых составил 100 руб.

Группа риска	Относительная частота	Параметр распределения количества исков внутри группы	Параметры распределения размера иска внутри группы
1	p=0,2	λ=21	α =4; β=1/2
2	p=0,4	λ=32	α =5; β=1/3
3	p=0,4	λ=43	α =3; β=1/2

Варианты ответов:

а) 85,02

б) 90,36

в) 95,70

г) 101,04

д) 106,38

Сумма баллов: 5

Правильный ответ: в)

Решение:

Группа риска	Ожидаемое количество исков в группе (=p·λ)	Вероятность появления каждого типа распределения размера иска	Условное мат. Ожидание E(X|Γ) =μx(Γ) = α/β	Условная дисперсия Var(X|Γ)=σ^2(Γ) = α/β^2
1	0,2·21=4,2	0,12281 = 4,2/(4,2 + +12,8 + 17,2)	8	16
2	0,4·32= 12,8	0,37427 = 12,8/(4,2 + +12,8 + 17,2)	15	45
3	0,4·43= 17,2	0,50292 = 17,2/(4,2 + +12,8 + 17,2)	6	12

$E(X) = E[E(X|Г)] = 0{,}12281 \cdot 8 + 0{,}37427 \cdot 15 + 0{,}50292 \cdot 6 = 9{,}61405$

$E[Var(X|Г)] = 0{,}12281 \cdot 16 + 0{,}37427 \cdot 45 + 0{,}50292 \cdot 12 = 24{,}84215$

$E[E(X|Г)^2] = 0{,}12281 \cdot 8^2 + 0{,}37427 \cdot 15^2 + 0{,}50292 \cdot 6^2 = 110{,}17571$

$Var\ [E(X|Г)] = E[E(X|Г)^2] – E[E(X|Г)]^2 = 110{,}17571 - 9{,}61405^2 = 17{,}74575$

Следовательно, безусловная дисперсия X:

$Var(X) = E[Var(X|Г)] + Var\ [E(X|Г)] = 24{,}84215 + 17{,}74575 = 42{,}5879$

Параметр доверительности модели Бюльмана вычисляется по формуле:

$$k = \frac{E[Var(X|Г)]}{Var\ [E(X|Г)]} = \frac{24{,}84215}{17{,}74575} = 1{,}39989$$

Коэффициент доверительности модели Бюльмана равен

$$Z = \frac{n}{n+k}$$

где n – объем выборки.
В нашем случае $n = 28$, $k = 1{,}39989$

$$Z = \frac{28}{28 + 1{,}39989} = 0{,}95238$$

Премия доверительности модели Бюльмана (оптимальная линейная оценка по методу наименьших квадратов) вычисляется по формуле:

$$U = Z \cdot D + (1 – Z) \cdot M$$

Где D – выборочное среднее
M – априорное безусловное математическое ожидание сл. величины равной размеру иска.
В нашем случае
$D = 100$; $M = E(X) = E[E(X|Г)] = 9{,}61405$
Таким образом

$$\mathrm{U} = 0{,}95238 \cdot 100 + (1 - 0{,}95238) \cdot 9{,}61405 = 95{,}69582$$

№ 33. Число страховых исков, приходящихся на один год, имеет распределение Бернулли со случайным параметром θ, который принимает два значения: 0,2 с вероятностью 0,7 и 0,3 с вероятностью 0,3. Размер иска принимает значения 25; 35; 45 с равными вероятностями. Число страховых исков и размер иска - независимые случайные величины для каждого застрахованного. Данные по суммарному размеру иска и количеству застрахованных приведены в таблице. Вычислить оптимальную линейную оценку по методу наименьших квадратов суммарного иска за 4 год в соответствии с моделью Бюльмана-Штрауба

Год	Количество застрахованных	Суммарный размер иска
1	110	290
2	220	430
3	280	642
4	310	

<u>Варианты ответов:</u>

а) 816,43

б) 869,43

в) 922,43

г) 975,43

д) 1028,43

Сумма баллов: 6

Правильный ответ: в)

<u>Решение:</u>

Пусть X_{ij} иск по j-ому застрахованному в году i, тогда $X_{ij} = NW$, где

$$N = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } 1-\theta \\ 1, & \text{с вероятностью } \theta \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} 25, & \text{с вероятностью } 1/3 \\ 35, & \text{с вероятностью } 1/3 \\ 45, & \text{с вероятностью } 1/3 \end{cases}$$

Из условия задачи имеем:

$E(N|\theta) = \theta$

$Var(N|\theta) = \theta \cdot (1-\theta)$

$E(W) = (25+35+45)/3 = 35$

$E(W^2) = (25^2+35^2+45^2)/3 = 1291{,}66667$

$E(\theta) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}23$

$E(\theta^2) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}055$

Отсюда получаем:

$E(X_{ij}\,|\theta) = E(N|\theta)\,E(W) = 35\theta$

$Var\,(X_{ij}\,|\theta) = E(W^2)\,Var\,(N\,|\theta) + [E(N\,|\theta)]^2\,Var\,(W) = 1291{,}66667\cdot\theta\cdot(1-\theta) +$

$+\theta^2\cdot(1291{,}66667 - 35^2) = 1291{,}66667\cdot\theta\cdot - 35^2\cdot\theta^2$

$E(X_{ij}) = E[E(X_{ij}\,|\theta)] = E(35\theta) = 35\cdot E(\theta) = 35\cdot 0{,}23 = 8{,}05$

$E[Var(X_{ij}\,|\theta)] = 1291{,}66667\cdot E(\theta) - 35^2\,E(\theta^2) = 1291{,}66667\cdot 0{,}23 - 35^2\cdot 0{,}055 =$
$=229{,}70833$

$Var[E(X_{ij}\,|\theta)] = Var(35\theta) = 35^2\,[E(\theta^2) - E(\theta)^2] = 35^2\cdot[0{,}055 - 0{,}23^2] = 2{,}5725$

Параметр доверительности модели Бюльмана вычисляется по формуле:

$$k = \frac{E[Var(Xij\,|\theta)]}{Var[E(Xij\,|\theta)]} = \frac{229{,}70833}{2{,}5725} = 89{,}29381$$

$$n = 110 + 220 + 280 = 610$$

$$Z = \frac{610}{610 + 89{,}29381} = 0{,}87231$$

$$\bar{X}_{ij} = \frac{290 + 430 + 642}{610} = 2{,}23279$$

Оптимальная линейная оценка по методу наименьших квадратов в модели Бюльмана - Штрауба для чистой премии равна

$$Z\cdot\bar{X}_{ij} + (1-Z)\cdot E(X_{ij}) = 0{,}87231\cdot 2{,}23279 + (1-0{,}87231)\cdot 8{,}05 =$$
$$= 2{,}97559$$

Отсюда оптимальная линейная оценка по методу наименьших квадратов в модели Бюльмана - Штрауба для суммарного убытка за 4 год равна:

$$310\cdot 2{,}97559 = 922{,}4329$$

№ 34. Страховая компания заключила договор перестрахования на следующих условиях. Перестраховщик выплачивает:

a) половину величины иска, если его размер меньше 60.

b) 10 и треть величины иска, если его размер от 60 до 120.

c) 26 и пятую часть величины иска, если его размер превосходит 120.

Вычислите ожидаемое значение выплат, производимых страховой компанией, если величина иска имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}008$.

Варианты ответов:
а) 70,91
б) 76,34
в) 81,77
г) 87,20
д) 92,63

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: в)

Решение:

Запишем функцию выплат, производимых страховщиком:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x < 60 \\ \frac{2}{3}x - 10, & 60 \le x < 120, \\ \frac{4}{5}x - 26, & 120 \le x \end{cases}$$

Тогда

$$E[h(x)] = \int_0^{60} \frac{x}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_{60}^{120}\left(\frac{2x}{3} - 10\right)\lambda e^{-\lambda x}dx +$$

$$+ \int_{120}^{+\infty}\left(\frac{4x}{5} - 26\right)\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$E[h(x)] = \frac{1}{2\lambda}\left(1 - e^{-60\lambda}(60\lambda + 1)\right) +$$

$$+ \frac{2}{3\lambda}\left(e^{-60\lambda}(60\lambda + 1) - e^{-120\lambda}(120\lambda + 1)\right) - 10\left(e^{-60\lambda} - e^{-120\lambda}\right) +$$

$$+ \frac{4}{5\lambda}e^{-120\lambda}(120\lambda + 1) - 26e^{-120\lambda}$$

Подставляя $\lambda = 0{,}008$, получим:

$$E[h(x)] = 81{,}77275$$

№ 35. Актуарий располагает следующей информацией о страховых случаях прошлого периода:

0 – 400 руб.	150 исков
400 – 900 руб.	300 исков
900 – 1400 руб.	200 исков
1400 – 1900 руб.	100 исков
1900руб. и больше	0 исков

Для моделирования ущерба актуарий использовал экспоненциальное распределение со средним значением 450. Вычислите статистику χ^2 для данного распределения.

Варианты ответов:

а) 757,59

б) 767,59

в) 777,59

г) 787,59

д) 797,59

Сумма баллов: 4

Правильный ответ: б)

Решение:

Рассмотрим две гипотезы:

H_0: иски имеют экспоненциальное распределение

H_1: иски имеют не экспоненциальное распределение

Общее количество исков за прошлый год

750 =150 +300 +200 +100 + 0

Вероятность попадания иска в интервал АВ при экспоненциальном распределении с параметром λ равна $\int_A^B \lambda e^{-\lambda x}\ dx$

Вычислим ожидаемое количество исков на каждом интервале учитывая, что λ=1/450:

$$I_1 = 750\int_0^{400} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = 750\left(1 - e^{-\lambda\cdot 400}\right) = 441{,}39159$$

$$I_2 = 750\int_{400}^{900} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = 750\left(e^{-\lambda\cdot 400} - e^{-\lambda\cdot 900}\right) = 206{,}90375$$

$$I_3 = 750\int_{900}^{1400} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = 750\left(e^{-\lambda\cdot 900} - e^{-\lambda\cdot 1400}\right) = 68{,}18698$$

$$I_4 = 750\int_{1400}^{1900} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = 750\left(e^{-\lambda\cdot 1400} - e^{-\lambda\cdot 1900}\right) = 22{,}47163$$

$$I_5 = 750\int_{1900}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = 750 e^{-\lambda\cdot 1900} = 11{,}04605$$

Тогда статистика χ^2:

$$\frac{(150 - I_1)^2}{I_1} + \frac{(300 - I_2)^2}{I_2} + \frac{(200 - I_3)^2}{I_3} + \frac{(100 - I_4)^2}{I_4} + \frac{(0 - I_5)^2}{I_5} = \\ = 767{,}58781$$

№ 36. Страховая компания применяет следующую схему скидок за отсутствие убытков:

Уровень 0	Уровень1	Уровень 2
0%	10%	30%

Если страхователь в течение года не подает исков, то в следующем году он переходит на следующий уровень скидок, либо остается на уровне 2. Если в течение года подан хотя бы один иск, страхователь переходит на предыдущий уровень либо остается на уровне 0. Полная годовая премия составляет 1100. Страхователь не подает иск с вероятностью 0,7. Определить среднюю премию после достижения равновесного состояния.

Варианты ответов:

а) 856,04
б) 866,04
в) 876,04
г) 886,04
д) 896,04

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: б)

Решение:

Премия с уровнем скидок 1 равна 990 рублей
Премия с уровнем скидок 2 равна 770 рублей

Матрица P переходов состояний между уровнями 0, 1 и 2 имеет вид

Следующий уровень → Предыдущий уровень ↓	0	1	2
0	p	1 - p	0
1	p	0	1 - p
2	0	p	1 - p

где p = 1 – 0,7 = 0,3.

Распределение вероятностей в равновесном состоянии является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

где

$\boldsymbol{\pi}$ – вектор вероятностей состояний,
P – матрица переходов.
Приведенная выше система эквивалентна системе

$$\begin{cases} p\pi_0 + p\pi_1 = \pi_0 \\ (1-p)\pi_0 + p\pi_2 = \pi_1 \\ (1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{(1-p)}{p}\pi_0 \\ \dfrac{p}{(1-p)}\pi_2 = \dfrac{(1-p)}{p}\pi_0 \\ \pi_1 = \dfrac{p}{(1-p)}\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_0 + \frac{(1-p)}{p}\pi_0 + \frac{(1-p)^2}{p^2}\pi_0 = 1$$

Отсюда

$$\pi_0 = 0{,}11392;\ \pi_1 = 0{,}26581; \pi_2 = 0{,}62023$$

Тогда средняя премия равна

$$1100\pi_0 + 990\pi_1 + 770\pi_2 = 866{,}041$$

№ 37. Страховая компания предоставляет застрахованным у нее лицам скидки за отсутствие убытков в размере 11% за один год без убытков, 21% за два года без убытков (подряд), 41% за три и более года без убытков (подряд). Если в течение года подан хотя бы один иск, страхователь возвращается на предыдущий уровень либо остается на уровне 0%. Полная годовая премия составляет 1100. Страхователь подает иск только если возмещение (имеющее экспоненциальное распределение со средним 1600) превосходит максимальные возможные потери от уменьшения размера скидки в последующие три года, в предположении, что в последующие годы иски отсутствуют. Определите отношение суммы вероятностей подачи иска страхователями, имеющими скидки 11% и 21% к сумме вероятностей подачи иска страхователями, имеющими скидки 41% и 0% (без скидок).

Варианты ответов:
а) 0,51
б) 0,66
в) 0,81
г) 0,96
д) 1,11

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: в)

Решение:

Учитывая, что в последующие годы иски отсутствуют составим следующую таблицу:

Уровень скидки в текущем году	(1) Премии в следующие три года при условии отсутствия иска в текущем году			(2) Премии в следующие три года при условии подачи иска в текущем году			выигрыш от неподачи иска в текущем году
	1	2	3	1	2	3	
0	979	869	649	1100	979	869	451
1	869	649	649	1100	979	869	781
2	649	649	649	979	869	649	550
3	649	649	649	869	649	649	220

В последнем столбце приведен выигрыш от неподачи иска в текущем году, который вычисляется как разность суммы премий в следующие три года при условии отсутствия иска и суммы премий в следующие три года при условии подачи иска.

Тогда на основании этой таблицы легко вычисляется искомое отношение равно:

$$\frac{P(X>781)+P(X>550)}{(X>451)+P(X>220)}=\frac{\exp(-\frac{781}{1600})+\exp(-\frac{550}{1600})}{\exp(-\frac{451}{1600})+\exp(-\frac{220}{1600})}=0{,}81364$$

№ 38. Страховая компания заключила договор перестрахования эксцедента убытка с уровнем собственного удержания 800. Величина ежегодного суммарного иска имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром λ = 15, при этом индивидуальные иски имеют равномерное распределение на интервале (0, 2000). Вычислите среднее значение суммарного иска для перестраховщика.

Варианты ответов:
а) 5200
б) 5300
в) 5400
г) 5500
д) 5600

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: в)

Решение:
Величина выплат перестраховщика по одному иску имеет вид:

$$Y_i = \max(X_i - 800, 0)$$

Среднее значение выплат перестраховщика по одному иску равно

$$E[Y_i]=\int_{800}^{2000}(x-800)f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2000}\left(\frac{2000^2-800^2}{2}-800\cdot(2000-800)\right)$$

$$E[Y_i]=360$$

Значит, среднее значение суммарного иска для перестраховщика имеет вид

$$E\left[\sum_{i=1}^{N}Y_i\right]=E[N]\cdot E[Y_i]=\lambda\,E[Y_i]=15\cdot 360=5400$$

№ 39. Для страхового портфеля из 750 полисов одногодичного и 850 полисов двухгодичного страхования вероятность возникновения иска по каждому полису составляет p = 0,002. Все полисы независимы (как внутри группы, так и между группами). Величина исков имеет Гамма распределение с функцией плотности $f_x = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$ и параметрами $\alpha_1 = 40, \beta_1 = 3$ и $\alpha_2 = 20, \beta_2 = 2$, для одногодичного и двухгодичного страхования, соответственно. Вычислите дисперсию суммарного иска.

Варианты ответов:
а) 451
б) 498
в) 545
г) 592
д) 639

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: а)

Решение:

Среднее значение одного иска и его дисперсия для каждого вида страхования имеют вид

$$E(X_k) = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

$$Var(X_k) = \frac{\alpha_k}{(\beta_k)^2}$$

k =1, 2

Тогда дисперсия величины суммарного иска

$$S = \sum_{j=1}^{750} X_1 I_1 + \sum_{j=1}^{850} X_2 I_2$$

будет равна

$$Var[S] = 750 Var[X_1 I_1] + 850 Var[X_2 I_2]$$

$$Var[X_k I_k] = Var[X_k] p + E^2[X_k](p - p^2)$$

$$Var[S] = 750\big(4{,}44444 \cdot 0{,}002 + 13{,}33333^2(0{,}002 - 0{,}002^2)\big) + 850\big(5 \cdot 0{,}002 + 10^2(0{,}002 - 0{,}002^2)\big) = 450{,}95986$$

№ 40. Страховая компания в следующем году планирует продать 120 полисов по определённому виду страхования. Премия по каждому полису составляет P, при этом компания терпит издержки при оформлении каждого полиса в размере 45% от величины премии. Вычислите вероятность того, что к концу следующего года страховая компания разорится, если суммарный годовой иск по полису имеет нормальное распределение со средним значением $0{,}85 \cdot P$ и стандартным отклонением $2{,}5 \cdot P$, а начальный фонд равняется $U = 25 \cdot P$.

Варианты ответов:

а) 0,66
б) 0,68
в) 0,70
г) 0,72
д) 0,74

Сумма баллов: 4
Правильный ответ: а)

Решение:

Величина фонда к концу года будет равняться

$$U_e = 25P + 120P - 120 \cdot 0{,}45 \cdot P - S = 91P - S$$

где S - суммарные убытки за весь год.
Распределение S имеет вид

$$N(120 \cdot 0{,}85P, 120 \cdot (2{,}5P)^2) = N(102P, 120 \cdot 2{,}5^2P^2)$$

Тогда вероятность того, что значение фонда собственных средств будет меньше нуля равна

$$P(U_e < 0) = P(S > 91P) = 1 - \Phi\left(\frac{91P - 102P}{(120 \cdot 2{,}5^2P^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 1 - 0{,}34397 =
= 0{,}65603$$

№ 41. Страховая компания продаёт полисы, включающие безусловную франшизу 700. Найдите ожидаемое значение суммарной выплаты компании для исков, по которым фактически осуществляются выплаты, если иски имеют распределение Парето с функцией плотности $f_X(x) = \alpha\lambda^{\alpha}(\lambda + x)^{-\alpha-1}$ и параметрами α = 3 и λ = 310.

Варианты ответов:

а) 455,00

б) 505,00

в) 555,00

г) 605,00

д) 655,00

Сумма баллов: 4

Правильный ответ: б)

Решение:

Страховая компания выплачивает величину

$$Y = \begin{cases} X - E, \ X > E \\ 0, \ X \le E. \end{cases}$$

где E – франшиза.

Для нахождения ожидаемой величины фактических выплат вычислим плотность условного распределения $\bar{Y} = X - E \mid X > E$:

$$P\left(X - E < x \mid X > E\right) = \frac{P(E < X < x + E)}{P(X > E)} = \frac{F_X\left(x + E\right) - F_X\left(E\right)}{1 - F_X\left(E\right)}.$$

Продифференцируем левую и правую часть получившегося равенства по $x > 0$:

$$f_Y(x) = \frac{f_X(x+E)}{1 - F_X(E)} = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x + E)^{\alpha+1}} \frac{(\lambda + E)^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}} = \frac{\alpha(\lambda + E)^{\alpha}}{(\lambda + x + E)^{\alpha+1}} = Pareto(\alpha, \lambda + E)$$

Ожидаемое значение выплат равно:

$$E[\bar{Y}] = \frac{\lambda + E}{\alpha - 1} = \frac{310 + 700}{3 - 1} = 505$$

№ 42. Страховой компанией была получена случайная выборка значений исков: 50, 110, 156, 190, имеющих распределение Бура с функцией плотности $f_X(x) = \frac{\alpha\gamma\lambda^{\alpha}x^{\gamma-1}}{(\lambda + x^{\gamma})^{\alpha+1}}$ и параметрами λ = 350 и γ = 1,4. Используя метод максимального правдоподобия, получите оценку параметра α.

Варианты ответов:

а) 0,63

б) 0,73

в) 0,83

г) 0,93

д) 1,03

Сумма баллов: 4

Правильный ответ: в)

Решение:

Функция правдоподобия при $n = 4$ имеет вид:

$$L(\alpha) = \alpha^n \gamma^n \lambda^{\alpha n} \prod_{i=1}^{n} \left(x_i^{\gamma-1} (\lambda + x_i^{\lambda})^{-\alpha-1} \right)$$

$$\ln L(\alpha) = n \ln \alpha + n \ln \gamma + \alpha n \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} \left((\gamma - 1) \ln x_i - (\alpha + 1) \ln(\lambda + x_i^{\gamma}) \right)$$

Дифференцируя по α, получаем:

$$L'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda + x_i^{\gamma})$$

$$L''(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} < 0$$

следовательно, максимум функции правдоподобия достигается при

$$L'(\alpha) = 0$$

т.е.

$$\bar{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\lambda + x_i^{\gamma}\right) - n \cdot \ln\lambda} = 0{,}83281$$

№ 43. Страховая компания предполагает, что убытки по определенной категории случаев имеют распределение Вейбулла с функцией плотности $f(x) = \alpha\gamma x^{\gamma-1} e^{-\alpha x^{\gamma}}$, а первый и третий квартили этого распределения равны, соответственно, $x_{0,25} = 0{,}5$; $x_{0,75} = 10$. Используя метод процентилей, оцените параметры данного распределения. В ответе укажите значение параметра γ.

Варианты ответов:

а) 0,456

б) 0,479

в) 0,502

г) 0,525

д) 0,548

Сумма баллов: 4

Правильный ответ: г)

Решение:

Функция распределения для одного иска имеет вид:

$$F(x) = \int_0^x \alpha\gamma t^{\gamma-1} e^{-\alpha t^\gamma} dt = -\alpha\gamma \int_0^x \frac{t^{\gamma-1}}{\alpha\gamma}\frac{1}{t^{\gamma-1}} de^{-\alpha t^\gamma} = 1 - e^{-\alpha x^\gamma} .$$

Нижняя и верхняя квартили являются решениями, соответственно, уравнений:

$$\frac{1}{4} = 1 - e^{-\alpha x^\gamma}$$
$$\frac{3}{4} = 1 - e^{-\alpha x^\gamma}$$

Откуда

$$x_1 = \left(\frac{\ln 4/3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, x_2 = \left(\frac{\ln 4}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Оценки для $\bar{\alpha}$ и $\bar{\gamma}$ находятся, как решени/я системы

$$\begin{cases} x_1 = x_{0.25} \\ x_2 = x_{0.75} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln 4/3 = \alpha x_{0.25}{}^{\gamma} \\ \ln 4 = \alpha x_{0.75}{}^{\gamma} \end{cases}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\ln\left(\frac{\ln 4/3}{\ln 4}\right)}{\ln\left(\frac{x_{0,25}}{x_{0,75}}\right)} = \frac{-1,57253}{-2,99573} = 0,52492$$

$$\bar{\alpha} = x_{0,75}^{-\gamma} \ln 4 = 0,41394$$

№ 44. Индивидуальные иски из портфеля страховой компании принимают значения 1 и 2 с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. Количество исков в данном портфеле имеет отрицательное биноминальное распределение с функцией распределения $p(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k)} p^k q^x, x = 0, 1, 2 \ldots$ и параметрами k =3 и p = 0,3. Вычислите распределение суммарного иска для данного портфеля при n = 2.

Варианты ответов:

а) 0,03

б) 0,04

в) 0,05

г) 0,06

д) 0,07

Сумма баллов: 3

Правильный ответ: в)

Решение:

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N-1} + X_N$$

$$P[S_N=2] = P[S_N=2|N=0]P[N=0] + P[S_N=2|N=1]P[N=1] + P[S_N=2|N=2]P[N=2] + \ldots =$$
$$= P[S_N=2|N=1]P[N=1] + P[S_N=2|N=2]P[N=2] = 0{,}7 \cdot P[N=1] + 0{,}3^2\, P[N=2] =$$
$$= 0{,}7 \cdot C_3^2 \cdot 0{,}3^3 \cdot (1 - 0{,}3) + \ 0{,}3^2 \cdot C_4^2 \cdot 0{,}3^3 \cdot [1 - 0{,}3]^2 \ = 0{,}04683$$

№ 45. В таблице приведен кумулятивный треугольник развития произошедших убытков и заработанные премии соответствующих лет:

год страховых событий	год развития убытков			заработанная премия
	0	1	2	
2005	2878	3220	3645	4620
2006	3145	3495		4870
2007	3170			5060

Резерв убытков, вычисленный методом Борнхьюттера-Фергюсона, равен 6600. Известно, что после 2-го года развития оплаченных убытков не бывает, инфляция отсутствует, а суммарные оплаченные убытки составляют 4700. Определите ожидаемую убыточность.

Варианты ответов:

а) 0,71

б) 0,66

в) 0,61

г) 0,56

д) 0,51

Сумма баллов: 5

Правильный ответ: в)

Решение:

По данным треугольника вычисляем факторы развития от 0-го к 1-му и от 1-го ко 2-му годам, соответственно:

$$\frac{3220+3495}{2878+3145}=1{,}11489;\quad \frac{3645}{3220}=1{,}13199$$

затем считаем кумулятивный фактор развития f и коэффициент $(1-1/f)$:

$$f_{01}=1{,}11489\cdot 1{,}13199=1{,}26204;\ f_{12}=1{,}13199\ \cdot 1=1{,}13199\,;\ f_{23}=1$$

$$(1-\frac{1}{f_{01}})=0{,}20763;\quad \left(1-\frac{1}{f_{12}}\right)=0{,}1166;\quad (1-1/f_{23})=0$$

	0	1	2
Фактор развития	1,11489	1,13199	1
f	1,26204	1,13199	1
(1-1/f)	0,20763	0,1166	0

Ожидаемые убытки i-го года событий определяются по формуле $(1-1/f_i)\times\gamma\times\mathrm{P}_i$, где γ – ожидаемая убыточность.

$$(1-\frac{1}{f_{01}})*P_{2007}+\ (1-\frac{1}{f_{01}})*P_{2006}+\ (1-\frac{1}{f_{01}})P_{2005}\ =$$
$$=0{,}20763\cdot 5060+0{,}1166\cdot 4870+0\cdot 4620=1050{,}6078+567{,}842=$$
$$=1618{,}4498$$

Резерв равен сумме заявленных и ожидаемых убытков за вычетом оплаченных, т.е.

$$(3170 + 3495 + 3645) + 1618{,}4498\cdot\gamma - 4700 = 6600,$$

откуда ожидаемая убыточность равна $\gamma = 0{,}6117$.

№ 46 Величина суммарного иска к страховой компании имеет вид $S=\ X_1+\ X_2$, где случайные величины X_1 и X_2 независимы и распределены по экспоненциальным законам со средними значениями 120 и 80, соответственно. Вычислите вероятность того, что суммарный иск по данному портфелю превысит 200.

Варианты ответов:

а) 0,36

б) 0,37

в) 0,38

г) 0,39

д) 0,40

Сумма баллов: 3

Правильный ответ: д)

Решение:

Исходя из условия имеем $\lambda_1 = \frac{1}{120} = 0{,}00833$; $\lambda_2 = \frac{1}{80} = 0{,}0125$

Прежде всего, вычислим плотность $f_S(t)$ распределения случайной величины S. Для этого найдем свертку:

$$(f_{X_1} * f_{X_2})(t) = f_S(t) = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1(t-y)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$$

Тогда вероятность того, что суммарный иск по данному портфелю превысит $M = 200$ вычисляется как

$$P(S \geq \mathrm{M}) = \int_M^\infty f_S(t)dt = \frac{\lambda_1 e^{-M\lambda_2} - \lambda_2 e^{-M\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Подставляя числовые значения получим

$$P(S \geq 200) = \frac{0{,}00833 \cdot e^{-200 \cdot 0{,}0125} - 0{,}0125 \cdot e^{-200 \cdot 0{,}00833}}{0{,}00833 - 0{,}0125} = 0{,}40258$$

№ 47. Курс доллара составляет 71 руб. за доллар, непрерывная безрисковая рублевая процентная ставка на 6 месяцев равна 6,5% годовых, долларовая – 2% годовых. Определите форвардный курс доллара через 6 месяцев.

Варианты ответов:

а) 72,60

б) 72,62

в) 74,27

г) 74,08

д) 77,30

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: б)

Решение:

Для форвардных курсов валют справедлива следующая формула:

$$F = S \cdot e^{(r-q)t}$$

где

r – ставка без риска национальной валюты;
q – ставка без риска котируемой валюты;
t – время действия контракта;
S – спот курс в прямой котировке.
В условиях задачи:

$$F = S \cdot e^{(r-q)t}$$

$$F = 71 \cdot e^{(0{,}065\,-\,0{,}02)\cdot(\frac{6}{12})} = 72{,}61561$$

№ 48. Купонная облигация с номиналом 1000 руб. торгуется по цене 900 руб. Купон выплачивается один раз в конце года по ставке 4% годовых. Срок до погашения облигации 3 года, спот ставки для одного года и для двух лет равны соответственно 5% и 9% годовых. Определить теоретическую ставку спот для трех лет.

Варианты ответов:
а) 7,56%
б) 7,89%
в) 8,22%
г) 8,55%
д) 8,88%

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: б)

Решение:

Теоретическая ставка спот на три года определяется из уравнения для современной стоимости облигации:

$$900 = \frac{40}{(1 + 0{,}05)} + \frac{40}{(1 + 0{,}09)^2} + \frac{40 + 1000}{(1 + x)^3}$$

Отсюда

$$x = \left(\frac{40 + 1000}{900 - \frac{40}{(1 + 0{,}05)} - \frac{40}{(1 + 0{,}09)^2}} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{1000 + 40}{828{,}23756} \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$
$$= 0{,}07885$$

Таким образом теоретическая ставка спот на три года составляет 7,89%

№ 49. Инвестор планирует приобрести 11-летнюю корпоративную облигацию номиналом 100 руб. с годовым купоном 45 руб. По оценке инвестора, каждый год существует 1% вероятность дефолта по облигации в случае которого купоны не будут выплачены. При условии рыночной ставки 5%, найти ожидаемую текущую стоимость купонных платежей.

Варианты ответов:
а) 418,77
б) 402,53
в) 386,29
г) 370,05
д) 353,81

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: д)

Решение:

$$\boldsymbol{E}PV = C \cdot \sum_{t=1}^{t} v^t \cdot {}_t p_x = 45 \cdot \sum_{t=1}^{11} \left(\frac{0{,}99}{1{,}05} \right)^t =$$

$$= 45 \cdot \left(\frac{0{,}99}{1{,}05} \right) \frac{1 - \left(\frac{0{,}99}{1{,}05} \right)^{11}}{1 - \left(\frac{0{,}99}{1{,}05} \right)} = 353{,}81184$$

№ 50. Двум менеджерам фондов А и В предоставили для инвестирования по X млн рублей. Оба менеджера полностью инвестировали эти деньги в акции. В течение следующих 6 месяцев рынок акций демонстрировал очень низкую активность. Стоимость фондов обоих менеджеров не изменилась, при этом взносы в фонды и выплаты из них отсутствовали. Затем из фонда менеджера A было изъято Y млн руб., а менеджеру B были даны для инвестирования еще Y млн руб. В следующие 6 месяца рынок акций демонстрировал рост, оба менеджера имели прибыль по своим инвестициям в акции и в итоге стоимости фондов A и B составили соответственно 16 млн руб. и 44 млн руб. Годовые взвешенные по деньгам доходности в течение всего периода для менеджеров фондов A и B составили соответственно 22,11% и 53,78%. Вычислите значения X и Y и укажите в ответе значение X.

Варианты ответов:
а) 24,54
б) 21,30
в) 21,18
г) 20,64
д) 20,11

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: б)

Решение:

Взвешенная по деньгам ставка доходности i_A для менеджера A определяется из уравнения:

$$X(1+i_A)^T - Y(1+i_A)^{t_2} = S_A$$

Взвешенная по деньгам ставка доходности i_B для менеджера B определяется из уравнения:

$$X(1+i_B)^T + Y(1+i_B)^{t_2} = S_B$$

где S_A и S_B – итоговые стоимости фондов, $T = t_1 + t_2$.

Решая систему линейных относительно X и Y уравнений

$$\begin{cases} X(1+i_A)^T - Y(1+i_A)^{t_2} = S_A \\ X(1+i_B)^T + Y(1+i_B)^{t_2} = S_B \end{cases}$$

получаем

$$X = \frac{S_A\left(\frac{1+\ i_B}{1+\ i_A}\right)^{t_2} +\ S_B}{(1+\ i_A)^{t_1}(1+\ i_B)^{t_2} +\ (1+\ i_B)^{t_1+\ t_2}} =$$

$$= \frac{16 \cdot \left(\frac{1+0{,}5378}{1+0{,}2211}\right)^{0{,}5} + 44}{(1+0{,}2211)^{0{,}5} \cdot (1+0{,}5378)^{0{,}5} + (1+0{,}5378)^{0{,}5+0{,}5}}$$

$$= \frac{61{,}95537}{2{,}90813}$$

$$\begin{cases} X = 21{,}30419 \\ Y = 9{,}06266 \end{cases}.$$

№ 51. Инвестор занял длинную позицию по шестимесячным *Call* и *Put* опционам на одну и ту же акцию. Параметры заключенных контрактов представлены в таблице:

Тип опциона	Цена исполнения	Цена приобретения	Позиция (кол-во опционов)
Call	170	6	85
Put	140	4	105

К моменту окончания контрактов спотовая цена акции составила 150 руб. Определите финансовый результат для инвестора.

Варианты ответов:
а) 2020
б) 930
в) 0
г) -930
д) -2020

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: г)

Решение:

Для приобретенных опционов *Call* финансовый результат определяется как $(max(0; S - K) - N_C \cdot C)$, для приобретенных опционов *Put* финансовый результат определяется как $(max(0; K - S) - N_P \cdot P)$. Общий финансовый результат определяется следующим образом:

$$PL = N_C \cdot max(S - K_C;0) + N_P \cdot max(K_P - S;0) - N_C \cdot C - N_P \cdot P,$$

где

N_C – размер позиции по опциону *Call*;
N_P – размер позиции по опциону *Put*;

K_C – цена исполнения опциона *Call*;
K_P – цена исполнения опциона *Put*;
C – цена приобретения опциона *Call*;
P – цена приобретения опциона *Put*;
S – спотовая цена акции в момент исполнения опционов;
Откуда

$$PL = 85 \cdot max(150 - 170;0) + 105 \cdot max(140 - 150;0) - 85 \cdot 6 - 105 \cdot 4 = -930.$$

№ 52. Доходность акций компании А и рыночного портфеля за восемь лет представлены в таблице:

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8
Доходность А%	10	-4	-6	-4	2	1	8	-5
Доходность рыночного портфеля%	15	-2	-3	2	8	4	6	4

Определить коэффициент бета акции относительно рыночного портфеля на основе несмещенных оценок.

<u>Варианты ответов:</u>
а) 0,904
б) 0,924
в) 0,944
г) 0,964
д) 0,984

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: а)

<u>Решение:</u>

Несмещенная оценка дисперсии доходности рыночного портфеля равна:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n-1} = \frac{229{,}5}{7} = 32{,}78571$$

Несмещенная оценка коэффициента ковариации доходностей акции и рыночного портфеля равна:

$$cov_{\text{xy}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_{x_i} - \bar{r}_x)(r_{y_i} - \bar{r}_y)}{n-1} = 29{,}64286$$

Коэффициент бета акции составляет:

$$\beta_A = \frac{cov_{\text{xy}}}{\sigma^2} = \frac{29{,}64286}{32{,}78571} = 0{,}90414$$

№ 53 Инвестор приобретает рисковый актив A на 300 тыс. руб. и актив B на 550 тыс. руб. за счет собственных средств, и дополнительно занимает 250 тыс. руб. под 10% и покупает на них актив A. Ожидаемая доходность актива A равна 29%, актива B – 21%. Определить ожидаемую доходность сформированного портфеля.

Варианты ответов:
а) 22,73%
б) 29,41%
в) 35,64%
г) 42,13%
д) 47,81%

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: б)

Решение:

Ожидаемая доходность портфеля равна:

$$r = \frac{0{,}29 \cdot 300 + 0{,}21 \cdot 550 + 0{,}29 \cdot 250 - 0{,}1 \cdot 250}{300 + 550} = 0{,}29412$$

№ 54. Ставка без риска равна 13%, ожидаемая доходность рыночного портфеля – 19%, бета-коэффициент акции компании относительно рыночного портфеля – 1,45. Определить ожидаемую доходность акции.

Варианты ответов:
а) 19,55%
б) 21,70%
в) 23,85%
г) 26,00%
д) 28,15%

Сумма баллов: 2
Правильный ответ: б)

Решение:

Для CAPM модели справедлива формула $r = r_f + \beta(r_m - r_f)$

Тогда в условиях задачи $r = 0{,}13 + 1{,}45 \cdot (0{,}19 - 0{,}13) = 0{,}217$

№ 55. На рынке капитала без возможности вложения в безрисковые активы существуют лишь два инвестора. Ковариационная матрица доступных активов выглядит следующим образом:

	Актив 1	Актив 2	Актив 3
Актив 1	1,00	0	0
Актив 2	0	2,00	0
Актив 3	0	0	3,00

Капитал первого инвестора составляет 250000 руб. и распределен среди активов следующим образом: в первый актив инвестировано 15% капитала, во второй актив 35% капитала, в третий актив 50%. Капитал второго инвестора составляет 350000 и распределен среди активов следующим образом: в первый актив инвестировано 40% капитала, во второй актив 15% капитала, в третий актив 45%. Рассчитайте портфель с минимальной дисперсией и нулевой бета.

Варианты ответов:
а) {0,5763; 0,1408; 0,2829}
б) {0,6763; 0,1908; 0,1329}
в) {0,7763; 0,2408; -0,0171}
г) {0,8763; 0,2908; -0,1671}
д) {0,9763; 0,3408; -0,3171}

Сумма баллов: 5
Правильный ответ: д)

Решение:
Капитализация рынка составляет

$$S = S_1 + S_2 = 250000 + 350000 = 600000$$

Определим рыночный портфель *(m1; m2; m3)*

$$m_1 = \frac{r_{11}S_1 + r_{21}S_2}{S} \quad m_2 = \frac{r_{12}S_1 + r_{22}S_2}{S} \quad m_3 = \frac{r_{13}S_1 + r_{23}S_2}{S}$$

$$m_1 = \frac{0{,}15 \cdot 250000\ + 0{,}4 \cdot 350000}{600000} = 0{,}29583$$

$$m_2 = \frac{0{,}35 \cdot 250000\ + 0{,}15 \cdot 350000}{600000} = 0{,}23333$$

$$m_3 = \frac{0{,}5 \cdot 250000\ + 0{,}45 \cdot 350000}{600000} = 0{,}47083$$

Находим вектор бета активов. Для этого умножаем ковариационную матрицу на вектор рыночного портфеля

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}29583 \\ 0{,}23333 \\ 0{,}47083 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}29583 \\ 0{,}46666 \\ 1{,}41249 \end{pmatrix}$$

Условие о том, что бета искомого портфеля равна нулю выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$$

Кроме того

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Отсюда

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + (1 - x_1 - x_2)\beta_3 = 0$$

Выразим x_2 через x_1

$$x_1(\beta_1 - \beta_3) + x_2(\beta_2 - \beta_3) + \beta_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{(\beta_3 - \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_3)} x_1 - \frac{\beta_3}{(\beta_2 - \beta_3)} = 0$$

Для удобства введем следующие обозначения

$$b = \frac{(\beta_3 - \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_3)}; \quad a = \frac{\beta_3}{(\beta_2 - \beta_3)}$$

$$b = \frac{(1{,}41249 - 0{,}29583)}{(0{,}46666 - 1{,}41249)} = -1{,}18061;$$

$$a = \frac{1{,}41249}{(0{,}46666 - 1{,}41249)} = -1{,}49339$$

Формула дисперсии портфеля в нашем случае (то есть с учетом диагональности матрицы ковариаций) выглядит следующим образом:

$$D = {x_1}^2 \cdot C_{11} + {x_2}^2 \cdot C_{22} + {x_3}^2 \cdot C_{33}$$

Выражая все слагаемые в левой части через x_1 получим

$$D = {x_1}^2 \cdot C_{11} + (bx_1 - \ a)^2 C_{22} + (1 - x_1 - (bx_1 - \ a))^2 \cdot C_{33}$$

Дифференцируя выражение по переменной x_1 и приравнивая результат к нулю, получим условие для минимума дисперсии

$$x_1 \cdot C_{11} + (bx_1 - \ a) \cdot b \cdot C_{22} - (1 - x_1 - (bx_1 - \ a))(1 + b) \cdot C_{33}$$

$$x_1 \cdot (C_{11} + b^2 \cdot C_{22} + (1 + b)^2 C_{33}) - \ abC_{22} - (1 + a + b + ab) \cdot C_{33} = 0$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{(abC_{22} + (1 + a + b + ab)C_{33})}{C_{11} + b^2 \cdot C_{22} + (1 + b)^2 C_{33}}$$

Отсюда $x_1 \ = 0{,}9763$

Тогда $x_2 \ = 0{,}3408$ $x_3 \ = -0{,}3171$

Таким образом, искомый портфель {0,9763; 0,3408; -0,3171}

№ 56. Цена спот акции 110 руб. По мнению инвестора цена акции через 3 месяца может составить 80 руб. или 150 руб. Предполагается, что акция бесконечно делима. Безрисковая простая годовая ставка на срок 3 месяца составляет 5% годовых. На акцию торгуется европейский опцион *Call* с ценой исполнения 110 руб. Исходя из принципа отсутствия арбитража, определить, сколько должен стоить опцион *Call*.

Варианты ответов:
а) 17,71
б) 15,21
в) 12,71
г) 10,21
д) 7,71

Сумма баллов: 3
Правильный ответ: а)

Решение:

Стоимость опциона можно определить как стоимость портфеля, состоящего из акций и заемных средств, который бы копировал результаты по опциону.

Портфель сформированный из n акций и заемных средств в размере k рублей через три месяца должен принести такие же результаты, как и опцион $Call$.

$$\begin{cases} 150 \cdot n + \left(1 + 0{,}05 \cdot \dfrac{3}{12}\right) k = 40 \\ 80 \cdot n + \left(1 + 0{,}05 \cdot \dfrac{3}{12}\right) k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 150 \cdot n + 1{,}0125 \cdot k = 40 \\ 80 \cdot n + 1{,}0125 \cdot k = 0 \end{cases}$$

Отсюда n = 0,57143; акции; k = -45,14978 руб.
Тогда стоимость такого портфеля

$$P \cdot n + k = 110 \cdot 0{,}57143 + -45{,}14978 = 17{,}70752 \text{ рублей.}$$

№ 57. Стабилизационный резерв – это:

Варианты ответов:
а) Часть начисленной страховой премии по договору, относящаяся к периоду действия договора, выходящему за пределы отчетного периода, предназначенная для исполнения обязательств по обеспечению предстоящих выплат, которые могут возникнуть в следующих отчетных периодах
б) Оценка не исполненных или исполненных не полностью на отчетную дату обязательств страховщика по осуществлению страховых выплат, включая сумму денежных средств, необходимых страховщику для оплаты экспертных, консультационных или иных услуг, связанных с оценкой размера и снижением ущерба, нанесенного имущественным интересам страхователя, возникших в связи со страховыми случаями, о факте наступления которых в установленном законом или договором порядке заявлено страховщику в отчетном или предшествующих ему периодах
в) Оценка обязательств страховщика по осуществлению страховых выплат, включая расходы по урегулированию убытков, возникших в связи со страховыми случаями, происшедшими в отчетном или предшествующих ему периодах, о факте наступления которых в установленном законом или договором порядке не заявлено страховщику в отчетном или предшествующих ему периодах
г) Оценка обязательств страховщика, связанных с осуществлением будущих страховых выплат в случае образования отрицательного финансового результата от проведения страховых операций в результате действия факторов, не зависящих от воли страховщика, или в случае превышения коэффициента состоявшихся убытков над его средним значением

д) Отношение суммы произведенных в отчетном периоде страховых выплат по страховым случаям, произошедшим в этом периоде, резерва заявленных, но неурегулированных убытков и резерва произошедших, но незаявленных убытков, рассчитанных по убыткам, произошедшим в этом отчетном периоде, к величине заработанной страховой премии за этот же период.

Сумма баллов: 1
Правильный ответ: г)

№ 58. Пенсионная схема – это:

Варианты ответов:
а) Ежегодная денежная выплата, назначаемая и выплачиваемая негосударственным пенсионным фондом застрахованному лицу в соответствии с договором о создании профессиональной пенсионной системы
б) Совокупность условий, определяющих порядок уплаты только пенсионных взносов
в) Совокупность условий, определяющих порядок уплаты пенсионных взносов и выплат негосударственных пенсий
г) Ежемесячная денежная выплата, назначаемая и выплачиваемая фондом застрахованному лицу в соответствии с договором о создании профессиональной пенсионной системы
д) Нет верного варианта

Сумма баллов: 1
Правильный ответ: в)

№ 59. Что входит в состав собственного имущества негосударственного пенсионного фонда?
I. Собственные средства
II. Пенсионные резервы
III. Пенсионные накопления
IV. Пенсионные выплаты

Варианты ответов:
а) Все кроме I
б) Все кроме IV
в) Все кроме II
г) Все кроме I и IV

д) Все перечисленное

Сумма баллов: 1
Правильный ответ: б)

№ 60. Единовременная выплата осуществляется следующим категориям застрахованных лиц:

I. Лицам, получающим страховую пенсию по инвалидности или страховую пенсию по случаю потери кормильца либо получающим пенсию по государственному пенсионному обеспечению, которые не приобрели право на установление страховой пенсии по старости в связи с отсутствием необходимого страхового стажа и (или) величины индивидуального пенсионного коэффициента
II. Лицам, размер накопительной пенсии которых в случае ее назначения составил бы 5 процентов и менее по отношению к сумме размера страховой пенсии по старости с учетом фиксированной выплаты к страховой пенсии по старости, повышений фиксированной выплаты к страховой пенсии и размера накопительной пенсии рассчитанных на дату назначения накопительной пенсии
III. Лицам, получающим трудовую пенсию по инвалидности или трудовую пенсию по случаю потери кормильца либо получающим пенсию по государственному пенсионному обеспечению, которые не приобрели право на установление трудовой пенсии по старости в связи с отсутствием необходимого страхового стажа
IV. Лицам, размер накопительной части трудовой пенсии по старости которых в случае ее назначения составил бы 5 % и менее по отношению к размеру трудовой пенсии по старости (включая страховую и накопительную части), рассчитанному на дату назначения накопительной части трудовой пенсии по старости
V. Лицам, сформировавшим пенсионные накопления за счет дополнительных страховых взносов на накопительную часть трудовой пенсии, взносов работодателя, средств (части средств) материнского (семейного) капитала, направленных на формирование накопительной части трудовой пенсии, дохода от их инвестирования, при возникновении права на установление трудовой пенсии по старости (в том числе досрочной)

Варианты ответов:
а) Только I и II

б) Только III и IV
в) Только III
г) Верно все, кроме V
д) Нет верного варианта

Сумма баллов: 1
Правильный ответ: а)

№ 61. Возможно ли направление имущества на покрытие отрицательного результата от инвестирования средств пенсионных накоплений?

Варианты ответов:
а) Возможно при условии принятия соответствующего решения советом фонда
б) Возможно при условии согласования с Банком России
в) Невозможно
г) Возможно при условии, что размер требуемых средств не превышает 15% от размера всех пенсионных накоплений
д) Нет верного варианта

Сумма баллов: 1
Правильный ответ: а)